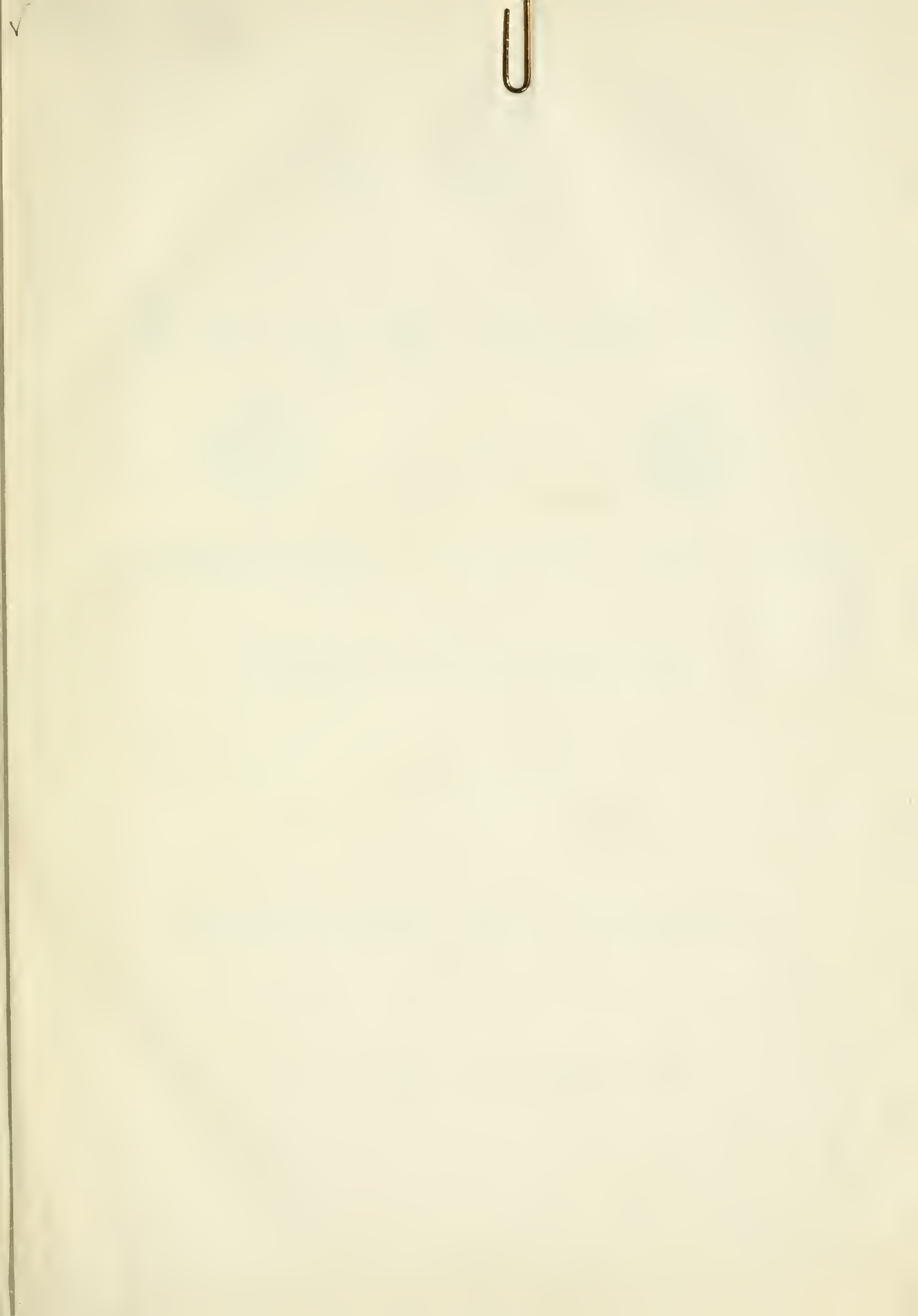
Kleyers Encyklopädie

# Geschichte der Geometrie




von

**R. Klimpert**





# Kleyers
# Encyklopädie



der gesamten



mathematischen, technischen und exakten

Natur-Wissenschaften.

## Geschichte der Geometrie

von

Richard Klimpert.

# Geschichte der Geometrie

für

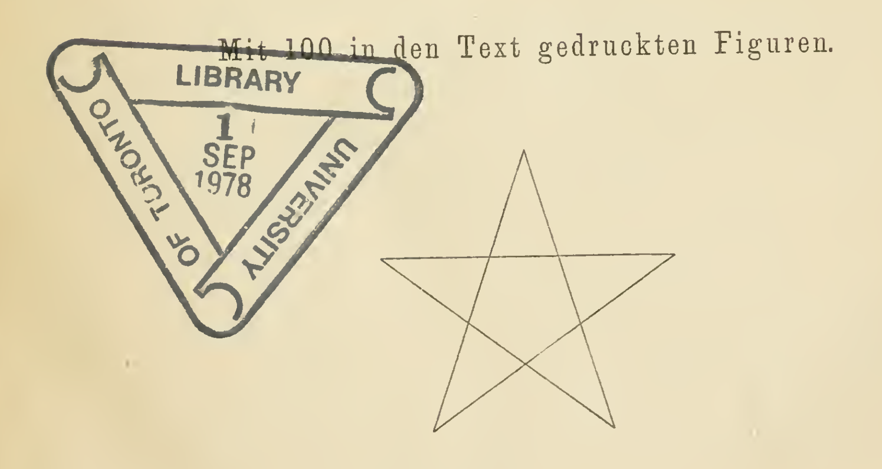
Freunde der Mathematik

gemeinverständlich dargestellt

von

**Richard Klimpert.**

Mit 100 in den Text gedruckten Figuren.





**Stuttgart.**

Verlag von Julius Maier.

1888.



Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

# Vorwort.

Das vorliegende Buch hat den Zweck, die Freunde der Mathematik in Kürze und chronologischem Zusammenhang bekannt zu machen mit den so überaus interessanten und für das praktische Leben wichtigen Entdeckungen auf dem Gebiet der Geometrie. Die bisher erschienenen Geschichten der Mathematik resp. Geometrie sind teilweise im Buchhandel nicht mehr käuflich, sondern nur noch in grösseren Bibliotheken, also vorherrschend dem Grossstädter zugänglich, und ausserdem sind dieselben durchweg von Gelehrten für Gelehrte geschrieben und erfordern zu ihrem vollen Verständnis neben verschiedenen fremdsprachlichen Kenntnissen ein vollständiges Beherrschen des mathematischen Stoffes. Daneben enthalten diese Werke gar häufig Untersuchungen über Dinge und verschiedenartige Ansichten über streitige Punkte, welche nur für den gelehrten Forscher von Interesse sein können, während sie jeden andern Leser ermüden und die Bildung eines Gesamtüberblicks erschweren. So findet sich denn nach meiner unmassgeblichen Ansicht eine Lücke in dem bezüglichen Litteraturgebiet vor, darin bestehend, dass ein Buch fehlt, welches es auch dem Nichtakademiker ermöglicht, die allmähliche Entwickelung der Geometrie zu verfolgen. In dem Wunsche, diese Lücke auszufüllen, ist unter Zuhilfenahme der in der Einleitung, sowie an verschiedenen Stellen im Text genannten Werke das vorliegende Büchlein entstanden, welches, seinem Zweck entsprechend, hauptsächlich die Elementargeometrie berücksichtigt, ohne dabei das Gebiet der höheren Geometrie zu vernachlässigen. Letztere konnte allerdings nur eine andeutungsweise Behandlung erfahren.

In der Hoffnung, dass meine Arbeit, besonders in den Kreisen der Lehrer, lesenswert erscheinen und deren Existenz als eine berechtigte anerkannt wird, übergebe ich dieselbe der Oeffentlichkeit.

**Bremen,** im März 1888.

**Der Verfasser.**

# Berichtigungen.

Seite 4 Zeile 15 von oben lies: „die Kultur desselben“ anstatt „derselben“.

„ 5 „ 3 „ unten „ „bemerkt“ statt „bemerkte“.

„ 15 „ 24 „ oben „ „in den Stand“ anstatt „in stand“.

„ 17 „ 5 „ „ „ „Neupythagoräer“ anstatt „Neupythagoriker“.

„ 23 „ 19 „ unten „ „auf“ anstatt „auch“.

„ 27 „ 1 „ „ und folgende lies: „selbst nicht die sogenannten Harpedonapten (Seilspanner oder Feldmesser) der Aegypter, wird auch von Cicero“ etc. anstatt: „selbst nicht die sogenannten Harpedonagten“ (Seilspanner oder Feldmesser).“ „Der Aegypter wird auch von Cicero“ etc.

Seite 31 Zeile 8 von unten lies: „Zitterrochen“ anstatt „Zifferrochen“.

„ 38 „ 17 „ oben „ „senkrecht“ anstatt senksecht“.

„ 56 „ 18 „ unten „ „arithmetische“ anstatt „aithmetische“.

„ 59 „ 23 „ oben „ „senkrechte“ statt „senkreechte“.

„ 76 „ 18 „ unten „ „Durchmesser“ statt „Durchmescer“.

„ 127 „ 2 „ oben „ $2 \sin^2 \cdot \frac{1}{2} \alpha = 1 - \cos \alpha$.

„ 128 „ 20 „ unten „ „ergeben“ statt „erheben“.

# Inhaltsübersicht.

# Einleitung.

„Die Geschichte einer jeden Wissenschaft ist der Spiegel ihres innersten Lebens, von ihrem Ursprunge an bis auf den jeweiligen Zeitpunkt ihres Bestandes. Sie soll in geordneter, organischer Entwickelung einen Gesamtbegriff des Gebäudes der Wissenschaft darstellen, anfangend bei dem Fundament und fortfahrend bis zur letzten Stufe seiner Vollendung. Dabei soll sie nicht versäumen, die verschiedenen Arbeiter an diesem Werk an ihrem rechten Ort und zu ihrer rechten Zeit mit dem Ganzen in gehörige Verbindung zu bringen und ihnen jene Stelle zuzuweisen, die ihnen als Begründer und Entwickeler der Wissenschaft gebührt. So nur ist die Geschichte die Biographie der Wissenschaft selbst. — Gleichwie der Geschichte der Menschheit, ihren Thaten, Sitten und Institutionen der hohe Einfluss auf die Bildung des Menschengeschlechts nicht abgesprochen werden kann, so hat auch die Geschichte jeder Wissenschaft in ihrer engen Sphäre die gleiche Berechtigung und ihre grossen Vorteile.“ [1])

„Das jetzt lebende Geschlecht betrachtet sich als den Erben eines reichen, wissenschaftlichen Gutes, und es muss ihm daran gelegen sein, zu erfahren, auf welche Weise dieses Gut erhalten worden ist, und durch welche Mittel es bewahrt und vermehrt und unseren späten Nachkommen überliefert werden kann. Seit der Entstehung dieses Geschlechts hat es, im Aufsuchen der Wahrheit, vorwärts gestrebt, und jetzt, wo wir eine so hohe gebietende Stellung erreicht haben, auf der uns das helle Licht des Tages umstrahlt, jetzt müssen wir nur mit innigem Danke hinblicken auf die Wege, welche wir seit Jahrtausenden zurückgelegt haben, zurück auf die grosse Pilgrimschaft, die unsere ersten Väter im dämmernden Zwielicht mitten unter den Wilden der Urwelt begannen, und die Jahrhunderte durch unter unzähligen Hindernissen nur sehr langsam vorrückte, bis sie endlich auf mehr offenen und lichten Pfaden uns in weitere und fruchtbarere Gegenden geführt hat.“ [2])

„Gerade die Mathematik ist es, die sich von allen Wissenschaften am besten zur geschichtlichen Darstellung eignet; denn so dunkel auch ihre ersten Anfänge bei den verschiedenen Völkern des Altertums sind, und so schwer es ist, ihrem Ursprung und ihrer ersten Entwickelung bestimmte Grenzen zu geben, so lässt sich doch ihr weiterer Verlauf mit einer Wahrheit und Sicherheit darstellen, wie dies bei keiner andern Wissenschaft der Fall ist. Dieser Umstand liegt in dem Wesen der Mathematik selbst. Sie ist die Wissenschaft der strengen Wahrheit, der unumstösslichen Gesetze in Form und Natur. Ihre Schritte sind immer sicher und fest nach vorwärts, niemals nach rückwärts gegangen.“ [1])

„Aber merkwürdig ist es, dass gerade die Geschichte dieser Wissenschaft zu allen Zeiten bis zu Anfang dieses Jahrhunderts am wenigsten gepflegt worden ist. Was bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts in dieser Hinsicht gethan wurde, entspricht unseren Anforderungen keineswegs. Erstens erstrecken sich die geschichtlichen mathematischen Abhandlungen jener Zeit meistens nur über ein-

[1]) Suter. — [2]) Whewell.

zelne Abteilungen der Mathematik, bisweilen auch nur über bestimmte Zeitpunkte, und zweitens sind diese Werke fast durchschnittlich eine blosse chronologische Aufzählung der Gelehrten und ihrer Schriften." [1]) Erst im 19. Jahrh. scheint die Geschichte der Mathematik die ihr gebührende Würdigung zu erfahren, indem mancherlei Schriften zum Studium derselben erschienen sind, von denen an dieser Stelle nur erwähnt sein mögen: Kästner, Geschichte der Mathematik 1796 bis 1800; Poppe, Geschichte der Mathematik 1828; Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohnke, 1839; Arneth, Gesch. der reinen Mathematik 1854; Gerhardt, Gesch. der Mathematik in Deutschland, 1860; Ofterdinger, Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik, 1860; Cantor, mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker, 1863; Hultsch, die Werke Herons von Alexandrien, 1864; Bretschneider, die Geometrie vor Euklid, 1870; Friedlein, Beiträge zur Geschichte der Mathematik, 1872; Hankel, Gesch. der Mathematik, 1874; Suter, Gesch. der Mathematik, 1876; Günther, S., Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften, 1876; Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1880.

Die Mathematik ist die vornehmste aller Wissenschaften, welche die berühmtesten Philosophen des Altertums als einen Grundpfeiler der gesamten Weltweisheit ansahen. Sie behandelt die Eigenschaften der Grössen und die Gesetze ihrer Verbindung. Alle Grössen teilt man ein in stetige und unstetige und rechnet zu ersteren die Raum- und Zeitgrössen, bei denen ein allmählicher Uebergang von einer Grösse zu einer andern ohne Unterbrechungen stattfindet; zu letzteren dagegen die Zahlengrössen, weil zwischen einer Zahl und der nächsten ein Zwischenraum von einer Einheit liegt. Derjenige Teil der Mathematik, welcher sich vornehmlich mit Raumgrössen beschäftigt, und welcher höchst vielfältig und nützlich in das menschliche Leben eingreift, heisst Geometrie, und diese ist es besonders, welche in den folgenden Zeilen geschichtlich vorgeführt werden soll.

Obgleich die Spuren der Mathematik am weitesten hinaufreichen in den Blättern der Kulturgeschichte, so lässt sie sich doch historisch nicht bis auf ihre ersten Anfänge verfolgen, da sich diese Anfänge, der Natur der Sache nach, bis in die Zeiten der allerersten Entwickelung des gesellschaftlichen Lebens, bis in das tiefste Dunkel des Altertums verlieren. Von dem Augenblick an, wo die Menschen in gesellschaftliche Verbindungen traten und eine bestimmte Thätigkeit entfalten mussten, um sich die nötigen Lebensmittel zu verschaffen, als sie sich Hütten bauten und die Oberfläche der Erde in Felder einteilten, von diesem Augenblick an mussten auch schon allerlei Begriffe von Grössen entstehen und bis zu einem gewissen Grad ausgebildet werden. So waren schon die ursprünglichsten Zustände der Völker geeignet, mathematische und astronomische Grundbegriffe zum Bewusstsein zu bringen, und „so entwickelten sich durch die Eindrücke der Sinnenwelt auf den menschlichen Geist geometrische Vorstellungen von einfachem Gehalt, wie z. B. die der geraden und krummen Linien und Flächen, ja selbst die der einfachsten Figuren und Körper mit solch innerer Notwendigkeit, dass die Frage nach Zeit und Ort ihrer Entstehung ebenso wenig gestellt werden kann, als die nach Entstehung der Zahlbegriffe. Der Wilde besitzt diese Vorstellungen ebenso unmittelbar wie der zivilisierte Mensch und vielleicht auch ebenso klar. Ja selbst den Tieren fehlen Anschauungen dieser Art durchaus nicht. In gerader Linie fliehen sie nach ihren Schlupfwinkeln, gleich als wüssten sie, dass die gerade Linie der kürzeste Weg ist zwischen zwei Punkten; sie wählen, wenn ihnen an zwei Punkten Beute in

[1]) Suter.

Aussicht steht, unter sonst gleichen Verhältnissen die nähere u. s. w., auch die schönen geometrischen Verhältnisse, welche manche Tiere in ihren Bauten mit wunderbarer Zweckmässigkeit herstellen, wird man nicht als Folge ihrer leiblichen Organisation allein ansehen dürfen. — Man pflegt zwar diese tierischen Vorstellungen als „instinktive“ den menschlichen gegenüber zu stellen; doch dürfte es schwer sein, den charakteristischen Unterschied zwischen der Raumanschauung des Naturmenschen und jenem Instinkte zu entdecken, wenn man ihn nicht in dem allgemeineren sieht, den die Sprache überhaupt zwischen menschlichem und tierischem Intellekt begründet.“ [1]) Eine Art natürlicher Mathematik, beschränkt auf einfaches Zählen, Messen und Konstruieren, findet sich daher allenthalben, wo Menschen in irgend einer gesellschaftlichen Verbindung mit einander leben und verkehren und so wird man einsehen, dass diese, den Erscheinungen des täglichen Lebens so nahe stehenden Kenntnisse und Erfahrungen nicht bloss bei einem einzigen bestimmten Volke ihren Ursprung genommen haben. Der Hirte zählte seine Heerden, der Ackerbauer verglich die Grösse seines Grundstücks mit dem seines Nachbars, und als man von irdischen Dingen ablenkend sein Augenmerk auf das herrliche Himmelsgewölbe richtete, entdeckte man in den dort vor sich gehenden regelmässigen und festen Erscheinungen ein unübertreffliches Mittel, dem längst gefühlten Bedürfnis nach einer Zeiteinteilung und Zeitmessung entgegenzukommen. Aber in gleicher Weise, wie man die Zeit zu messen bestrebt war, suchte man auch gar bald nach Massgrössen für Raum und Schwere, und so treffen wir schon in den ältesten Zeiten auf rohe Spuren des Messens, wobei ganz beliebige und willkürlich gewählte Gegenstände von allgemeinem Vorkommen oder bestimmten Grössenverhältnissen benutzt wurden. So genügte als erstes Hohlmass etwa eine leere Kokosnussschale oder ein Ei, als Längenmass die Ausdehnung des Armes oder Fusses, als Gewichtsmass die Schwere einer Frucht und dergl. mehr, immer aber mussten durch derartige Vornahmen in den Menschen bestimmte, dauernde Vorstellungen und Begriffe geweckt werden, die, von den mannigfaltigsten Umständen abhängig, bei vielen Völkern nur Begriffe blieben, bei andern aber zu einer Wissenschaft ausgebildet wurden.

„Die elementaren geometrischen Gebilde, die gerade Linie, die Ebene, der rechte Winkel, der Kreis, das gleichseitige und gleichschenklige Dreieck, das Rechteck und die einfachsten geometrischen Körper, das rechtwinklige Parallelepipedon, die Kugel, der Cylinder, das Prisma, die Pyramide etc. fanden, als es galt Häuser zu bauen, Tempel und Denkmäler zu errichten, eine mehr oder minder häufige Darstellung und wurden so aus dem Nebel einer unbestimmten Vorstellung in das Licht einer klaren, sinnlichen Anschauung versetzt. Die Erfindung des Lineals, der Setzwage und des Zirkels, ohne welche kein Steinbau ausgeführt werden konnte, und der häufige Gebrauch dieser Werkzeuge gab schon zu einer abstrakten Vorstellung der Figuren, welche durch sie dargestellt werden sollten, Veranlassung. Durch die häufige Anwendung des Messens wurde der Sinn für Grössenverhältnisse geschärft. Ja es mussten auf diesem Wege schon mancherlei Erfahrungen gesammelt werden, manche Aufgabe über die Inhaltsbestimmung der zum Bauen verwendeten Körper musste sich aufdrängen.“

„Der jedem Volke eigene Sinn für Raumverhältnisse wird ohne Zweifel in seiner Baukunst, sobald diese nur die unterste Stufe ihrer Entwickelung überschritten hat, zur Geltung kommen und somit immer der Zustand der Architektur mit dem der Geometrie in gewisser Beziehung stehen. Wir werden behaupten

[1]) Hankel.

können, dass ein Volk, wie das der Inder, welches die Schönheit seiner Bauwerke in weichen, schwülstigen, phantastischen Formen sucht, unmöglich einen lebhaften Sinn für die Untersuchungen der knappen, gesetzlichen Formen der Geometrie haben kann. Anderseits bei den Griechen, diese Einfachheit und Regelmässigkeit der in ihren Verhältnissen auf das Feinste bestimmten geometrischen Formen der Architektur, derselbe plastische Sinn, den wir in ihren, die feinsten Grössenverhältnisse der Figuren behandelnden geometrischen Untersuchungen wiederfinden. Was die übrigen Kulturvölker des Altertums betrifft, so wird uns weder die barocke Bauart der Chinesen noch die, zwar imponierende, doch stillose Baukunst der Babylonier, noch die prächtige, aber strukturwidrige der Phönikier einen hohen Begriff von der Reinheit ihrer geometrischen Anschauung geben; auch hat bei keinem dieser Völker die Geometrie eine bedeutende Entwickelung gehabt." [1])

„Soll aber bei einem Volke aus den Elementen des mathematischen Vorstellens eine Wissenschaft sich entwickeln, so muss die Kultur derselben schon eine nicht unbedeutende sein, und die gesellschaftlichen Verhältnisse müssen Veranlassung bieten, die Sichtung und geistige Durcharbeitung dieses Denkstoffes vorzunehmen. Es ist daher ganz naturgemäss, dass wir die Entstehung der Geometrie bei dem ältesten bekannten Kulturvolke, bei den Aegyptern suchen. Sie selbst legen sich die Erfindung und erste Ausbildung der Arithmetik, Geometrie und Astronomie bei, sowie auch deren Anwendung auf die Bedürfnisse des bürgerlichen, staatlichen und religiösen Lebens. Eine Nation, die volle viertehalb Jahrtausende hindurch in einem völlig geordneten Staatsleben verharrt hat und schon in den ältesten Zeiten Pyramiden, Tempel und Paläste, sowie grossartige Kanal- und Schleusenwerke anlegte, die noch nach Jahrtausenden Staunen und Bewunderung erregten, musste unbedingt in theoretischer und praktischer Mathematik erfahren sein." [2]) — „Jene krystallinische Regelmässigkeit der Bauten, deren Struktur frei zu Tage tritt, deren Grundlinien deutlich auslaufen, ohne durch allerlei Schmuck verdeckt zu werden, zeigt einen eigentümlichen Sinn für die Form selbst, welche keinem andern barbarischen Volke zukommt." [3])

# Die Aegypter. [4])

Das gesamte Altertum gesteht einstimmig den Aegyptern die Erfindung der mathematischen Wissenschaften zu. Schon Herodot, der um 460 v. Chr.

[1]) Hankel. — [2]) Bretschneider. — [3]) Hankel.

[4]) „Die Ueberzeugung, welche sich bei den Gelehrten des vorigen Jahrhunderts fast ohne Ausnahme vorfindet, und bis tief in das gegenwärtige hinein die herrschende geblieben ist, lautet dahin, dass Alles, was das Altertum in Kunst und Wissenschaft geleistet hat, das ausschliessliche Erzeugnis der schöpferischen Kraft des griechischen Geistes sei, und dass bis zu dessen Entfaltung auf der gesamten alten Welt tiefe geistige Finsternis geruht habe. Dem gegenüber versucht Röth in seiner „Geschichte unserer abendländischen Philosophie" den Nachweis zu liefern, dass diese Wissenschaft nicht griechischen, sondern ägyptischen Ursprungs sei, und dass dieselbe in einer, von den Aegyptern bereits fest ausgeprägten Form nach Griechenland übertragen ward." (Bretschneider.)

„Es ist aber sehr weit gegriffen, wenn man, wie Röth, den Aegyptern ausserordentliche Fortschritte in der Geometrie zuschreiben, und alles mathematische Wissen der Griechen bis auf Platon, ja bis auf Euklid, ägyptisches Eigentum nennen will. Es ist geradezu unmöglich, aus den griechischen Quellen einen klaren Einblick in den Zustand der ägyptischen Geometrie zu erlangen, zumal jene Schriftsteller, die über ägyptische Geschichte oder über das Leben griechischer Philosophen geschrieben haben, von Mathematik meistens gar nichts verstanden. Nur so viel können wir daraus entnehmen, dass die mathematischen Kenntnisse der jonischen Schule nicht weit über denen der ägyptischen Priester standen." — (Suter.)

Aegypten bereiste, legt ein direktes Zeugnis dafür ab, dass die Aegypter die Rechenkunst übten und Isokrates um 393 v. Chr. berichtet: „Die älteren (unter den ägypt. Priestern) setzten sie über die wichtigsten Angelegenheiten, die jüngeren dagegen überredeten sie, mit Hintansetzung des Vergnügens sich mit Sternkunde, Rechenkunst und Geometrie zu beschäftigen. Wenige Jahrzehnte später lässt Plato im Phädrus den Sokrates erzählen: „Ich habe vernommen, zu Naukratis in Aegypten sei einer der dortigen alten Götter gewesen, dem auch der Vogel geheiligt ist, den sie Ibis nennen, während der Gott selbst den Namen Theuth führt; dieser habe zuerst Zahlenlehre und Rechenkunst erfunden, und Geometrie und Astronomie.“ Noch bestimmter bemerkt Aristoteles in dem Anfang seiner Metaphysik, dass die Mathematik ihren Ursprung in Aegypten habe, da hier das Kollegium der Priester, frei von den Arbeiten des bürgerlichen Lebens, Musse hatte, sich den Wissenschaften zu widmen. Die direktesten Belege aber für die Entstehung der Mathematik bei den Aegyptern liefern die Schriftsteller, welche *nach* der Eroberung des Landes durch die Makedonier lebten, zu einer Zeit, in welcher die ägyptischen Wissenschaften bereits Gemeingut der hellenischen Welt geworden waren. Diodoros, der um 70 v. Chr. Aegypten bereiste und mit der Priesterschaft des Landes verkehrte, berichtet: „Die Aegypter behaupten, von ihnen sei die Erfindung der Buchstabenschrift und die Beobachtung der Gestirne ausgegangen; ebenso seien von ihnen die Theoreme (oder Lehrsätze) der Geometrie und die meisten Wissenschaften und Künste erfunden worden.“ An einer andern Stelle schreibt Diodor: „Die Priester lehren ihre Söhne zweierlei Schrift, die sogenannte heilige und die, welche man gewöhnlich lernt. Mit Geometrie und Arithmetik beschäftigen sie sich eifrig. Denn indem der Fluss jährlich das Land vielfach verändert, veranlasst er viele und mannigfache Streitigkeiten über die Grenzen zwischen den Nachbarn; diese können nun nicht leicht ausgeglichen werden, wenn nicht ein Geometer den wahren Sachverhalt durch direkte Messung ermittelt. Die Arithmetik dient ihnen in Haushaltungsangelegenheiten und bei den Lehrsätzen der Geometrie; auch ist sie denen von nicht geringem Vorteil, die sich mit Sternkunde beschäftigen. Denn wenn bei irgend einem Volke die Stellung und Bewegung der Gestirne sorgfältig beobachtet worden ist, so ist es bei den Aegyptern geschehen; sie verwahren Aufzeichnungen der einzelnen Beobachtungen seit einer unglaublich langen Reihe von Jahren, da bei ihnen seit alten Zeiten her die grösste Sorgfalt hierauf verwendet worden ist.“

In gleichem Sinne äussern sich spätere Schriftsteller. Dass aber besonders das Austreten des Nils Veranlassung zur eigentlichen Feldmesskunst bot, berichtet Herodot: „Auch sagten sie, dass dieser König [Sesostris [1])] das Land unter alle Aegypter so verteilt habe, dass er jedem ein gleich grosses Viereck gegeben und von diesem seine Einkünfte bezogen habe, indem er eine jährlich zu entrichtende Steuer auflegte. Wem aber der Fluss von seinem Teile etwas wegriss, der musste zu ihm kommen und das Geschehene anzeigen; er schickte dann die Aufseher, die auszumessen hatten, um wieviel das Landstück kleiner geworden war, damit der Inhaber von dem Uebrigen nach Verhältnis der aufgelegten Abgabe steuere. Hieraus scheint mir die Geometrie entstanden zu sein.“ Ganz dasselbe wird von Strabon und Heron dem Aelteren berichtet. Der Letztere bemerkte in seiner Einleitung in die Geometrie: „Die früheste Geometrie beschäftigte sich, wie uns die alte Ueberlieferung lehrt, mit der Messung und Verteilung der Länderei, woher sie „Feldmessung“ genannt ward.“ Solches

[1]) Sesostris ist niemand anders als König Ramses II. aus der XIX. Dynastie, der etwa 1407—1341 v. Chr. lebte.

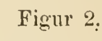
zeigt auch schon der Name dieser Wissenschaft an, welchen die Griechen ihr gegeben haben. Denn *γη* heisst die Erde, und *μετρειν* messen, also gleichsam die Wissenschaft, welche lehrt, Stücke der Erdoberfläche zu messen.

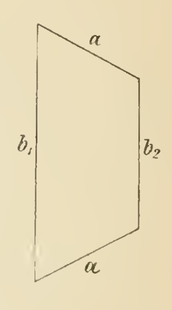
Also praktische Bedürfnisse, Bauten und Feldmessen haben die Geometrie ins Leben gerufen. „Dieselben wurden in Aegypten von erblichen Zünften, sogen. Kasten betrieben, welche, unter Oberleitung der Priester arbeitend, ihre Kunstgriffe und handwerksmässigen Operationen von Geschlecht zu Geschlecht sammelten und fortpflanzten, wodurch sich im Laufe langer Jahrhunderte eine bedeutende Masse geometrischen Materials ansammelte, welches die Priester ordneten, sichteten und in praktisch handliche Form brachten.“ Um so auffallender muss es erscheinen, dass Thales, der zu ihnen gereist war, noch die ersten Sätze der Geometrie zu erfinden hatte und erst Pythagoras, der Entdecker eines sehr notwendigen Satzes geworden ist. Die Aegypter können also, trotz einer langen Reihe von Jahrhunderten, nur verhältnismässig geringe Fortschritte in der wissenschaftlichen Geometrie gemacht haben und zwar hatte das seinen Grund darin, dass einmal alles wissenschaftliche Studium ausschliesslich auf die Priesterkaste beschränkt war, und dass die ermittelten geometrischen Resultate in den Kanon der heiligen Bücher aufgenommen, niemals Gemeingut werden konnten. Immerhin wird doch den Aegyptern der Ruhm bleiben, die logische Gliederung der geometrischen Wahrheiten in Lehrsätze und Aufgaben, und die Trennung von Konstruktion und Beweis zuerst angebahnt zu haben. Was ihnen aber gefehlt haben mag, ist der streng folgerichtige Aufbau der gesamten Wissenschaft aus einer geringen Zahl von Forderungen und Grundsätzen und das Zusammenfassen spezieller Fälle unter einem allgemeinen Gesichtspunkt. Die Beseitigung dieser Mängel ist das Hauptverdienst der Griechen.

Dass die ägyptischen Geometer im Konstruieren ganz besonders bewandert waren, ist schon im Altertum vielfach anerkannt. So lautet ein Ausspruch des Demokritos: „Im Konstruieren von Linien nach Massgabe der aus den Voraussetzungen zu ziehenden Schlüsse hat mich Keiner je übertroffen, selbst nicht die sogen. Harpedonapten (Feldmesser) der Aegypter.“ Und Theon sagt: „Babylonier, Chaldäer und Aegypter suchten eifrig nach allerhand Grundgesetzen und Hypothesen, durch welche den Erscheinungen genügt werden könnte; zu erreichen suchten sie dies dadurch, dass sie das früher Gefundene in Ueberlegung zogen und über die zukünftigen Erscheinungen Vermutungen aufstellten, wobei die einen sich arithmetischer Methoden bedienten, wie die Chaldäer, die andern konstruierender, wie die Aegypter.“ Aber auch aus dem geometrischen Material, welches die ersten griechischen Geometer von ihren ägyptischen Lehrern überkommen haben, geht hervor, dass die ägyptische Reisskunst oder darstellende Geometrie zu grosser Ausbildung gelangt war, denn dieses Material besteht weniger in Lehrsätzen als vielmehr in Konstruktionen nebst den hierzu unentbehrlichsten theoretischen Wahrheiten. So lernte Thales die Höhe eines Gegenstandes mittels des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks messen, Pythagoras das Vergleichen und Verwandeln der Flächenräume geradliniger Figuren und deren Addition, ja selbst Oenopides, der noch 470 einen kurzen Ausflug nach Aegypten machte, um den dortigen Priestern schnell etwas abzulernen, brachte als Gewinn seiner Bemühungen die Lösung von ein paar Konstruktionsaufgaben mit nach Hause. Das Alles deutet darauf hin, dass die ägyptische Geometrie weniger im Entwickeln theoretischer Wahrheiten, als vielmehr im Konstruieren bestand und die ältesten griechischen Geometer scheinen eine Masse solcher Konstruktionsaufgaben aus Aegypten heimgebracht zu haben. [1])

[1]) Bretschneider.

Auch der Inhalt des ältesten „mathematischen Handbuchs“, welches unter den Hiksoskönigen zwischen 2000 und 1700 v. Chr. von Ahmes niedergeschrieben wurde, bestätigt, dass die Leistungen der Aegypter hauptsächlich der angewandten Mathematik angehörten, indem dasselbe Massbestimmungen von Figuren und Körpern enthält, während sich von Lehrsätzen und Beweisen, überhaupt von einer, von bestimmten Grundsätzen ausgehenden theoretischen Behandlung, von einer Hindeutung auf synthetische Geometrie keine Spur findet. Alles ist in bestimmte Aufgaben gekleidet und durch Rechnung gelöst. Die Feldstücke, welche Ahmes darin ausmessen lässt, sind geradlinig oder kreisförmig begrenzt und die mit Benutzung eines Lineals aber ohne Zirkel angefertigten Figuren lassen deutlich erkennen, dass von geradlinigen Figuren nur gleichschenklige Dreiecke, Rechtecke und gleichschenklige Paralleltrapeze in Betracht gezogen werden sollen. Das Rechnungsverfahren besteht darin, dass der Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks gleich Grundlinie mal halbe Schenkellänge gesetzt ist oder $\triangle = \frac{b}{2} \times a$ (anstatt $\triangle = \frac{b}{2} \times \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$, worin $a$ die Schenkel und $b$ die Grundlinie bedeutet). Die Formel für die Fläche eines gleichschenkligen Paralleltrapezes (Antiparallelogramms) dessen beide unter sich gleiche nicht parallele Seiten je $a$, die parallelen Seiten $b_1$ und $b_2$ heissen, lautet $F = \frac{b_1 + b_2}{2} \times a$.


Figur 2.




Daran schliessen sich Aufgaben aus der eigentlichen Feldmesskunst, z. B. ein rechtwinkliges Dreieck im Felde abzustecken, dessen Katheten 10 und 4 Einheiten messen. Aber auch die Teilung und Zerlegung der Figuren wird in einzelnen Aufgaben gelehrt und zwar wird hierbei das Dreieck durch Gerade geteilt, die in gleich grossen Abständen von einander parallel zur Basis gezogen werden, während andere Figuren durch Zerlegung in Parallelogramme, gleichschenklige Dreiecke und Trapeze geteilt werden. Die im Papyrus vorgenommene Ausmessung des Kreises ist eine wirkliche Quadratur zu nennen, indem sie lehrt, ein Quadrat zu finden, welches dem Kreise flächengleich sei, und zwar wird als Seite des Quadrats der um $\frac{1}{9}$ seiner Länge verminderte Kreisdurchmesser gewählt. Dies entspricht einem Werte von $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1604\ldots$ für die Verhältniszahl der Kreisperipherie zum Durchmesser. Neben den geometrischen Aufgaben hat Ahmes seinen Lesern auch stereometrische vorgelegt, bei denen es sich um den Rauminhalt von Fruchtspeichern handelt. Endlich bietet der Papyrus noch fünf geometrische Aufgaben, welche eine Vergleichung von Liniengrössen, eine Art von Aehnlichkeitslehre, wenn nicht ein Kapitel aus der Trigonometrie enthalten. Es handelt sich um Pyramiden, und zwar um den Quotienten der Hälfte einer an der Pyramide vorgenommenen Abmessung, geteilt durch eine zweite u. s. w. Was das aber für Abmessungen waren, die so in Rechnung gezogen wurden, ist keineswegs klar.

Als eine weitere Bestätigung uralter geometrischer Kenntnisse bei den Aegyptern können auch die Figuren geometrischen Ursprungs angesehen werden, welche sich auf Wandgemälden aus den ältesten Zeiten vorfinden. Schon zur Zeit der V. Dynastie wurde in der Totenstadt von Memphis eine aus ineinander gezeichneten verschobenen Quadraten gebildete Verzierung angewandt. Auch pflegten die Aegypter die Wände, auf welchen sie Reliefarbeiten anbringen

wollten. in lauter einander gleiche Quadrate zu zerlegen und mit deren Hilfe die Umrisse des Einzuhauenden zu zeichnen; eine Gewohnheit, in welcher eine geometrische Proportionenlehre insoweit enthalten ist, dass wir den verkleinerten oder, wie wir es jetzt nennen, „verjüngten" Massstab angewandt finden.

Durch Durchmesser in gleiche Kreisausschnitte geteilte Kreise kommen vielfach vor, und zwar ist bei Zierraten die häufigste Teilung die durch 2 oder 4 Durchmesser in 4 oder 8 Teile, während auf Gefässen die Teilung des Kreises durch 6 Durchmesser in 12 Teile Regel ist. Wagenräder haben fast regelmässig 6 Speichen und Räder mit 4 Speichen kommen nur ganz selten vor.

Figur 3.

Figur 4.

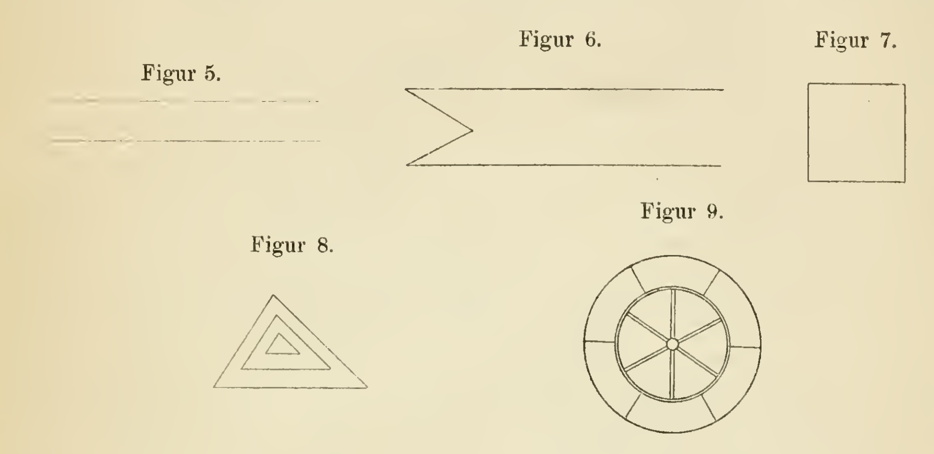
Aus den Inschriften und Zeichnungen des Horustempels zu Edfu in Oberägypten ergibt sich, dass man es liebte, gegebene Figuren zum Zweck der Ausmessung durch Hilfslinien in andere Figuren von einfacherer Begrenzung zu zerlegen, und diese Uebung zu allen Zeiten beibehielt, gleichwie es mit den alten Näherungsformeln für die Flächen von Dreiecken und Vierecken der Fall war. [1])

Die Geometrie der Aegypter diente also vor allem praktischen Bedürfnissen, war hauptsächlich konstruktiver Natur, während von einem geordneten wissenschaftlichen System bei ihnen keine Rede war. Wie weit nun die Aegypter in der Auffindung und Entwickelung der theoretischen Wahrheiten der Geometrie gekommen sind, darüber lassen sich nur Vermutungen aufstellen. Aus dem vorerwähnten Papyrus scheint [2]) so viel mit Sicherheit hervorzugehen, dass die Lehre von den Winkeln und parallelen Linien, die Bestimmung von Dreiecken, Parallelogrammen und Trapezen aus einzelnen ihrer Stücke, und die Flächenvergleichung und Berechnung dieser Figuren der Hauptsache nach von den ägyptischen Geometern entwickelt und durch bündige Beweise festgestellt waren. Ebenso scheinen sie mit den elementarsten Sätzen über den Kreis bereits vertraut gewesen zu sein und selbst in der Theorie der dem Kreise einbeschriebenen regelmässigen Vielecke einige Fortschritte gemacht zu haben. In der Stereometrie dagegen möchte man ihnen nicht mehr zuschreiben, als die Kenntnis der Bedingung, unter welcher eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht und allenfalls eine beschränkte Theorie des Parallelismus der Geraden und Ebenen im Raum. Von Körperformen scheinen sie aus der Praxis die Prismen, die vierseitigen regulären Pyramiden, die geraden Kegel und Cylinder, die Kugel und die regelmässigen Körper, mit Ausschluss des Dodekaeders, erhalten zu haben. In die Eigenschaften der Kugel sind sie, veranlasst durch das Bedürfnis der Astronomie, etwas tiefer eingedrungen; von den übrigen Körperformen dagegen mögen sie wenig mehr als deren Existenz gekannt haben. Gänzlich möchte ihnen abzusprechen sein die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, da sich von der dazu notwendigen Lehre von den Proportionen bei den Aegyptern nicht eine Spur vorfindet, und dieser Teil der Geometrie von den Babyloniern oder Chaldäern zu den Griechen gelangte.

[1]) Nach Cantor. — [2]) Nach Bretschneider.

# Die Babylonier.

Der nächste Schauplatz einer höheren Geisteskultur war das Land, welches zwischen Euphrat und Tigris gelegen ist. „Hier in Chaldäa gaben die durch Jahrtausende aufgehäuften Trümmerhügel eine ähnliche wertvolle Ausbeute, wie dort die in Stein gehauenen Gräber, die verschütteten Palastkammern Babylons eine ähnliche wie die unter günstigen Verhältnissen aufrecht gebliebenen Tempel Aegyptens.“ Wir wissen, dass sich die Chaldäer von jeher viel und mit Erfolg mit Astronomie und Mathematik beschäftigt hatten. Die Arithmetik wurde mehr kultiviert als die Geometrie, und bei dieser gingen sie mehr rechnend als konstruierend zu Werke, im Gegensatz zu dem Verfahren der Aegypter. Es ist sehr zu bedauern, dass gerade von hier so wenig Nachrichten auf uns gekommen sind, allein es gilt zunächst als sicher, dass es in Babylon eine sog. Vorbedeutungsgeometrie, d. h. eine Geometrie im Dienste der Wahrsagekunst gegeben hat. In derselben sind insbesondere folgende Figuren hervorzuheben:


Figur 5. Figur 6. Figur 7. Figur 8. Figur 9.

ein paar parallele Linien, ein Quadrat, eine Figur mit einspringendem Winkel und drei einander umschliessende Dreiecke. Dass den Babyloniern die Sechsteilung des Kreises bekannt war, wird dadurch bestätigt, dass auf ägyptischen Wandgemälden es gerade asiatische Tributpflichtige sind, welche auf ihren überbrachten Gefässen Zeichnungen haben, bei denen der Kreis durch sechs Durchmesser in 12 Teile geteilt ist. Uebereinstimmend zeigen ninivitische Denkmäler in ihren Abbildungen des Königswagens, dessen Räder mit 6 Speichen versehen. Endlich steht damit im Einklang die Dreiteilung eines rechten Winkels, welche auf einer assyrischen Thontafel geometrischen Inhalts entdeckt worden ist, sowie die Teilung des Kreises in 360 Grade. Aus dieser Sechsteilung des Kreises lässt sich schliessen, dass dieselbe durch Herumtragen des Halbmessers erfolgt ist; dabei lag es sehr nahe, Sehne und Bogen zu verwechseln und zur Annahme zu gelangen, der Kreisumfang selbst sei sechsmal der Halbmesser oder dreimal der Durchmesser, d. h. $\pi = 3$. Diese Formel findet sich angewandt bei der Schilderung des grossen Waschgefässes, das unter dem Namen des ehernen Meeres eine Zierde des Tempels bildete, welchen Salomo von 1014—1007 erbauen liess. Von diesem Gefäss heisst es: Und er machte ein Meer, gegossen 10 Ellen weit von einem Rande zum andern, rund umher, und 5 Ellen hoch, und eine Schnur, 30 Ellen lang, war das Mass ringsum.

Dabei ist offenbar $30 = 3 \times 10$ und der Talmud wendet in der Mischna die Regel an: „Was im Umfang drei Handbreiten hat, ist eine Hand breit.“

Dass die Babylonier den rechten Winkel kannten, folgt schon aus der vorerwähnten Dreiteilung desselben, sowie daraus, dass von Babylon aus der Gnomon zu den Griechen Uebergang fand.[1])

# Die Geometrie der Griechen.

## a. Die jonische Schule.

Als 560 v. Chr. Aegypten durch den König Psametich den Griechen geöffnet wurde, da entstand nicht allein ein lebhafter Handelsverkehr zwischen beiden Ländern, sondern es zogen auch wissbegierige Griechen nach diesem Lande, um an den dortigen Hochschulen sich soviel Wissen anzueignen, als nationale Engherzigkeit gestatten wollte. So wurden den Griechen durch die Aegypter eine Menge als unzweifelhafte Wahrheiten anerkannte Sätze geboten, Theoreme (d. h. Angeschautes, durch Betrachtung Gefundenes und erst zu Erweisendes) genannt, welche dann erst Wert und Geltung gewannen, wenn sie deren Richtigkeit zu beweisen im stande waren. Um aber zu den oft mit grossen Schwierigkeiten verbundenen Beweisen zu gelangen, waren zunächst scharfe Begriffsbestimmungen und Grundsätze nötig; dazu kamen nun noch gewisse Forderungen, deren Erfüllung als möglich vorausgesetzt wurde. Die Betrachtung eines gegebenen Satzes $A$ musste zunächst dahin führen, dass $A$ nur dann wahr sein kann, wenn $B$ wahr ist; das Gleiche galt nun wieder für den Satz $B$ u. s. w., wodurch man endlich auf Ursätze und Begriffsbestimmungen zurückkam. „Es ist klar, dass hierbei im Anfang die Fortschritte nur sehr langsam sein konnten und dass in derartigen Untersuchungen die Kundgebung einer neuen Zeit lag. Man kann die Bemühungen der Griechen zur Begründung einer wissenschaftlichen Mathematik als das Streben der Menschheit bezeichnen, aus dem Zeitalter der ungebundenen, regellosen, oft nur instinktartigen Geistesbewegung sich loszuwinden und in das des bestimmten, gesetzlichen Denkens überzutreten. Die Mathematik und später die Grammatik waren der Ausdruck dieses Strebens und neue, früher nicht gekannte. Erzeugnisse. Wie überhaupt alles in der Natur nur in allmälichen Uebergängen erfolgt, so lässt sich auch hier keine Grenze ziehen, aber durch die Zusammenfassung aller Thatsachen steht fest, dass erst in Griechenland die Verhältnisse so günstig zusammenwirkten, um diese neue Richtung ins Dasein rufen zu können, wofür das ganze geistige und materielle Leben der Griechen den Beweis liefert.“[2]) Das Streben der Griechen nach Klarheit und Bestimmtheit ergibt sich zunächst daraus, dass sie alle Sätze der Arithmetik geometrisch auffassten und so Alles zur sinnlichen Anschauung zu bringen suchten, wodurch anfänglich die Ueberzeugung unterstützt wurde. In dieser Form lernte, nach dem einstimmigen Zeugnis der hauptsächlichsten Schriftsteller, die über das Leben der ersten griechischen Philosophen geschrieben haben, Thales von Milet, als dessen Geburtsjahr gewöhnlich das Jahr 640 v. Chr. angegeben wird, in schon vorgerücktem Lebensalter in Aegypten eine Reihe elementarer geometrischer Lehrsätze, von denen er sofort Gebrauch machte, um für den Hafen seiner Vaterstadt einen einfachen Distanzmesser zu konstruieren.

[1]) Nach Cantor. — [2]) Arneth.

Thales, der erste griechische Philosoph und Stifter der jonischen oder physischen Schule lebte anfangs den öffentlichen Geschäften, verliess aber dann sein Vaterland, um bei den ägyptischen Weisen mathematische und astronomische Studien zu machen. Proklos schreibt hierüber: „Thales, der nach Aegypten ging, brachte zuerst diese Wissenschaft (die Geometrie) nach Hellas hinüber; und Vieles entdeckte er selbst, von Vielem aber überlieferte er die Anfänge seinen Nachfolgern; das Eine machte er allgemeiner, das Andere mehr sinnlich fassbar.“ Er soll bald seine Lehrer übertroffen und zum grossen Erstaunen des Königs Amasis die Höhe der Pyramiden aus ihrem Schatten berechnet haben. So berichtet Plutarch: „Obschon er dich auch um anderer Dinge willen bewundert, so schätzt er doch über Alles die Messung der Pyramiden, dass du nämlich ohne alle Mühe und ohne eines Instrumentes zu bedürfen, sondern indem du nur den Stock in den Endpunkt des Schattens stellst, den die Pyramide wirft, aus den durch die Berührung des Sonnenstrahls entstehenden zwei Dreiecken zeigest, dass der eine Schatten zum andern das (nämliche) Verhältnis hat, wie die Pyramide zum Stock.“ Diese Art der Messung würde allerdings die Lehre von den Proportionen voraussetzen, die wir aber so wenig bei den Aegyptern als bei Thales als bekannt voraussetzen dürfen, indem dieselbe erst viel später in der Mathematik der Griechen auftritt. Bretschneider nennt deshalb die Erzählung des Plutarchos „rein dem Gebiete des Romans angehörig und das Mathematische in derselben erfunden mit Zuhülfenahme derjenigen geometrischen Kenntnisse, die in späteren Jahrhunderten einem Schriftsteller zu Gebote standen.“ Doch hält er es auch für möglich, dass die Methode des Thales in der Folge auf die angegebene Weise fortgebildet worden war und Plutarchos aus Unkenntnis die letztere mit der ursprünglichen verwechselt hat. So können wir daher eher dem Diogenes Lärtios glauben, der den Thales den Schatten der Pyramide messen lässt, wenn der Schatten irgend eines andern Gegenstandes mit dem letzteren gleiche Höhe hat. Doch ist damit die Methode keineswegs gesichert. Möglicherweise war neben der Pyramide ein Stab von vorher gemessener also bekannter Höhe befestigt, an dessen Schatten man den erwünschten Moment gewissermassen ablesen konnte, wenn nämlich Schattenlänge und Stablänge identisch waren. Dann musste vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke auch die Schattenlänge der Pyramide als Mass ihrer Höhe gelten können. Das hier erwähnte Verfahren ist eine ganz einfache Anwendung der Haupteigenschaft des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks und erfordert so wenig Scharfsinn, dass man sich[1]) fest überzeugt halten kann, nicht eine Erfindung des Thales, sondern vielmehr eine von den ägyptischen Geometern gebrauchte uralte Methode der Höhenmessung vor sich zu haben. Dem Thales ist dieselbe von seinen Landsleuten zugeschrieben worden, weil er es war, durch den sie mit ihr bekannt gemacht wurden.

Ueber die andern geometrischen Sätze, die dem Thales zugeschrieben werden, belehrt uns des Proklos Kommentar zum I. Buche des Euklid. Darin werden ihm zugeschrieben der Beweis der Gleichheit der Scheitelwinkel, der Gleichheit der Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks [bei Erwähnung dieses Satzes bemerkt Proklos ausdrücklich, der Satz sei einer von den vielen, welche der Erfindungsgabe des Thales zu verdanken seien]; [2]) der Beweis des

[1]) Nach Bretschneider.

[2]) „Die Anschauung und unbewusste Ueberzeugung, dass zwei gleichlange Stäbe, welche man mit ihren oberen Enden verbunden auf den Boden stellt, gegen die Horizontale gleich geneigt sind, besass bereits der erste Mensch, der zwei solcher Stäbe zum Bau eines Zeltes oder Dachgiebels verwandte; es war aber das Verdienst jenes Philosophen, diese unmittelbare Ueberzeugung zuerst zum Bewusstsein, jene Anschauung zu einem abstrakten Ausdruck zu bringen

II. Kongruenzsatzes (wenn eine Seite und zwei Winkel des einen den ähnlich liegenden Stücken des andern Dreiecks gleich sind) und die Lösung der darauf sich gründenden Aufgabe, die Entfernung der Schiffe auf dem Meere vom Hafen aus zu messen und der Beweis, dass der Kreis durch den Durchmesser halbiert wird.[1]) Auch schreibt man dem Thales die erste Anwendung des Kreisbogens als Mass für die Winkel zu. Diogenes Lärtios schreibt ihm ferner noch die Erfindung des Satzes zu, dass die Dreiecke über dem Kreisdurchmesser rechtwinklige seien. Die Freude über diese Entdeckung soll so gross gewesen sein, dass er einen Stier geopfert habe. Dies wird übrigens auch von andern vom Pythagoras erzählt und zwar bei Anlass des gleichen Satzes. Wieviele und welche von diesen Erfindungen des Thales eigentümliches Produkt, und welche schon den Aegyptern bekannt waren, ist nicht zu entscheiden. Soviel aber ist wenigstens aus dem erwähnten Papyrus zu erkennen, dass die Aegypter schon mit diesen elementaren Sätzen der Planimetrie vertraut gewesen sein müssen, woraus aber noch nicht zu schliessen ist, dass es mit den Erfindungen des Thales nicht weit her sein könne, zumal Proklos bemerkt, dass die angeführten Sätze bei weitem nicht alle seien, die dem Thales zugeschrieben werden. So konnten ihm namentlich die einfachsten Sätze von den Parallelen, von den gleichseitigen, gleichschenkligen und ungleichseitigen Dreiecken, sowie von den Parallelogrammen schwerlich unbekannt sein. Dann ist es keineswegs ausgemacht, ob Thales das ganze geometrische Wissen der Aegypter sich angeeignet habe, da er, wie einige Schriftsteller anführen, besonders der Astronomie seine Aufmerksamkeit geschenkt habe. Er kann daher leicht Sätze, die die Aegypter schon kannten, ohne dass er es wusste, als seine eigenen ausgegeben haben. Die wissenschaftliche Bedeutung des Thales ist übrigens[2]) nicht in der Anzahl der Sätze zu finden, welche er selbst entdeckte, sondern in dem Anstoss zu geometrischen Studien, den er gab, nebst den Anfängen deduktiver Behandlung, welche er lehrte. Man hat aus den Sätzen, welche als thaletisch überliefert sind, gefolgert, dass dem Thales auch die Summe der Dreieckswinkel $= 2R$ bekannt gewesen sein müsse. Nach Andeutungen des Mathematikers Geminos ist dieser Satz nicht gar lange nach Thales bewiesen worden, und nach Hankel kam man etwa auf folgende Art zu dem Beweise: Wie erwähnt, war den Aegyptern die Zerlegung der Kreisfläche in sechs gleiche Ausschnitte bekannt und jedenfalls auch die Halbierung des Kreises durch den Durchmesser. Verband man die Endpunkte der Halbmesser miteinander, so entstanden 6 um den Mittelpunkt geordnete gleichseitige Dreiecke, die den ebenen Raum um jenen Mittelpunkt herum vollständig ausfüllten. Drei dieser Winkel bildeten zusammen einen gestreckten, und da augenscheinlich jeder Winkel des gleichseitigen Dreiecks dem andern gleich war, so kam man zu der Einsicht, dass die Winkel des gleichseitigen Dreiecks zusammen zwei Rechte betrugen. Demnächst mochte man die Zerlegbarkeit des gleichschenkligen Dreiecks in zwei Hälften, welche zu einem Rechteck sich ergänzen, erkennen, und

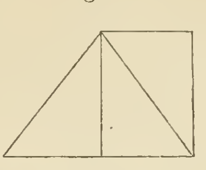
und so den Anfang zu einer wissenschaftlichen Behandlung der Raumverhältnisse zu machen, indem er die mehr oder minder verworrenen und unbewussten Anschauungen analysierte und in die Form fester, von dem Verstand zu erfassender Begriffe und Lehrsätze brachte.“ (Hankel.)

[1]) „Die Nachricht, Thales habe zuerst bewiesen, dass ein Kreis von seinem Durchmesser halbiert wird, scheint mir doch durch die Auffassung der spätern an Euklids Formen gewöhnten Geometer allzustark beeinflusst zu sein. Denn dieser Beweis würde schon einen Grad von Abstraktion und ein so ausgebildetes System von Begriffen voraussetzen, dass wir ihn kaum in diese erste Periode wissenschaftlichen Denkens verlegen können, wo auch in der Philosophie noch kein Zweifel auftaucht, dass das durch naive Anschauung Erkannte unmittelbar gewiss sei. Ja nicht einmal Euklid hat einen Beweis jenes Satzes für nötig gehalten.“ (Hankel.)

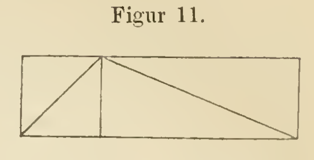
[2]) Nach Cantor.

wieder lehrte der Augenschein, dass bei einem derartigen Vereinigen der zwei Dreieckshälften vier rechte Winkel erschienen, von welchen zwei aus den ursprünglichen Winkeln des Dreiecks sich zusammensetzten. Jetzt fehlte nur noch der dritte und letzte Schritt. Ein beliebiges Dreieck wurde als Summe der Hälften zweier Rechtecke gezeichnet, so erschienen drei den ursprünglichen Dreieckswinkeln gleiche Winkel an der Spitze des Dreiecks zu einem gestreckten Winkel vereinigt.

Figur 10.



Figur 11.



Thales stiftete nach seiner Rückkehr aus Aegypten die sogenannte jonische Schule und starb während der Olympischen Spiele, denen er als Zuschauer beiwohnte, gegen 550 v. Chr. — Als einst bei Kos ein goldener Dreifuss aufgefunden worden war und das Orakel zu Delphi denselben dem Weisesten zu verehren befohlen hatte, wurde er dem Thales zugeschickt.

Seine nächsten und hauptsächlichsten Schüler sind Anaximandros und Anaximenes, deren Wirken ungefähr in die Mitte des 6. Jahrh. v. Chr. fällt. Von geometrischen Entdeckungen dieser Philosophen ist uns wenig oder fast gar nichts bekannt; dieselben scheinen mehr den naturphilosophischen und astronomischen, als den geometrischen Studien obgelegen zu haben. Nach Strabon gab Anaximander die erste geographische Karte heraus. nach Diogenes Lärtios lehrte er: Anfang und Urelement der Dinge sei das Unendliche, die Teile des Unendlichen seien veränderlich, das Ganze aber unveränderlich. Die Erde liege in der Mitte der Welt und sei kugelförmig, der Mond leuchte mit erborgtem Licht und werde von der Sonne erleuchtet, die Sonne aber sei nicht kleiner als die Erde und reinstes Feuer. Er wird als der Erfinder des Gnomon genannt (d. i. ein auf einer horizontalen Ebene senkrecht aufgestellter Stab, dessen Fusspunkt der Mittelpunkt dreier konzentrischer Kreise ist, die so beschrieben sind, dass das Schattenende des Stabes zur Mittagszeit im Sommersolstitium den Umfang des innersten Kreises, zur Zeit der Nachtgleichen den des mittleren und im Wintersolstitium den Umfang des äussern Kreises berührte) und konstruierte einen Stundenzeiger; er zuerst fand auch die Sonnenwenden und Nachtgleichen und gab[1]) eine bildliche Darstellung der gesamten Geometrie heraus. Röth schliesst aus dieser Stelle, dass Anaximandros einen Abriss der zeichnenden Geometrie geschrieben habe, was sich sehr wohl mit seiner übrigen Thätigkeit verträgt. Nach Simplikios' Zeugnis bestimmte er auch die Grösse und Entfernung der Planeten. Von den geometrischen Leistungen des Anaximenes ist nichts bekannt. Auch von Anaxagoras, des Anaximenes Schüler, der ums Jahr 460 v. Chr. wirkte, wissen wir nur, dass er[2]) sich im Gefängnis mit der Quadratur des Kreises beschäftigt haben soll und von Proklos wird behauptet, dass er Vieles über Geometrie geliefert habe.

„Die Geometrie hat die ersten hundert Jahre in der jonischen Schule keine wesentlichen Fortschritte gemacht. Die konstruktive Geometrie bildete noch immer den Hauptstoff. Die jonische Schule hat nur das Verdienst, den Boden für die mathematischen Studien in der griechischen Nation urbar und eben gemacht zu haben; das Samenkorn aber, das, in diesen Boden gelegt, schnell zu einer ebenso kraftvollen wie mächtigen Pflanze sich entwickeln sollte, verdankt die Nation einem andern Kreise von Denkern, der italischen oder pythagoräischen Philosophenschule,“ [3]) deren Stifter Pythagoras war.

[1]) Nach Suidas. — [2]) Nach Plutarch. — [3]) Bretschneider.

## b. Die pythagoräische Schule.

Pythagoras wurde auf einer Reise, die seine Eltern unternommen hatten, im Jahre 569 v. Chr. in Tyrus geboren, ging 551, im Alter von 18 Jahren, von Samos nach Lesbos zu Pherekydes, einem bedeutenden Lehrer damaliger Zeit, dessen Unterricht Pythagoras 2 Jahre lang genoss. 549 wandte er sich nach Milet zu Anaximander und Thales, worüber Jamblichos folgendes berichtet: „Aber auch Thales nahm ihn bereitwillig auf, bewunderte sein Hervorragen über andere Jünglinge, das er noch grösser und bedeutender fand, als den ihm vorausgegangenen Ruf; und indem er ihm von Kenntnissen mitteilte, soviel er vermochte, sein Alter und seine Schwäche bedauernd, ermunterte er ihn, nach Aegypten zu schiffen und sich besonders an die Priester zu Memphis und Diospolis (Theben) zu wenden. Denn von diesen sei er selbst mit dem ausgestattet worden, um deswillen er von der Menge ein Weiser genannt werde.“ 547 betrat Pythagoras ägyptischen Boden, nachdem er 1 Jahr lang in der phönikischen Priesterschule zu Sidon die Bekanntschaft mit den dortigen Weihediensten sich erworben hatte. In das älteste Priesterkollegium zu Theben aufgenommen, nahm Pythagoras in 21 Jahren nicht nur die ganze ägyptische Wissenschaft in sich auf, er brachte es auch im Tempeldienst zu den höchsten Ehren. In einem Fragment des Diogenes heisst es: „In Aegypten verkehrte er mit den Priestern und er lernte die Wissenschaft und Sprache der Aegypter, sowie die dreifache Schrift derselben, nämlich die epistolographische, hieroglyphische und symbolische.“ Infolge eingetretener politischer Ereignisse kam Pythagoras 526 als Gefangener nach Babylon, wo er sich die Kenntnisse der Chaldäer aneignete und auch mit Juden, Brahmanen und Kalatiern zusammentraf. 513, in einem Alter von 56 Jahren, kehrte Pythagoras, mit reichen Kenntnissen versehen, nach der Heimat zurück und begann nach einer 1½ jährigen Rundreise durch Griechenland auf Samos seine Lehrthätigkeit. Diesen (teilweise Cantors math. Beiträgen entnommenen) Notizen gegenüber bemerkt Bretschneider: „Wenn von einer zwölfjährigen Gefangenschaft in Babylon gesprochen wird, so ist dies wohl nur geschehen, um Pythagoras mit Magiern und anderen orientalischen Priesterschaften in Verbindung zu bringen, um ihn auch von deren Weisheit profitieren zu lassen. Selbst angenommen, dass er auf des Kambyses Befehl zugleich mit ägyptischen Priestern in die Gefangenschaft geführt worden sei (525 v. Chr.), so wäre er jedenfalls unter der Regierung des Darius Hystaspis ebensogut freigelassen worden wie seine ägyptischen Lehrer und Freunde.“ — Da Pythagoras unter der Tyrannis, die sich in seiner Heimat an die Spitze geschwungen hatte, keinen geeigneten Boden für seine philosophischen Lehren fand, so siedelte er 510 nach Kroton in Unteritalien über. Hier brachte er in kurzer Zeit jene berühmte Schule zu hoher Blüte, der wir so bedeutende Fortschritte in Mathematik und Naturwissenschaften zu verdanken haben. Ein Strom der verschiedenartigsten Zuhörer ergoss sich zu seinen Vorträgen, welche die Lehre des Pythagoras von der elementarsten Mathematik bis zu den scharfsinnigsten Betrachtungen der Philosophie und Theologie, sowie populäre Vorlesungen über Sittenlehre, Moral, Lehre von der Unsterblichkeit der Seele und Seelenwanderung umfassten. Durch Hippasos (einen aus der Schule als unwürdig Ausgestossenen) politischer Umtriebe angeklagt, wurde die Schule 490 zersprengt, und Pythagoras unter Einziehung seiner Güter verbannt. Derselbe verlebte die nächsten 16 Jahre in Tarent. 474 flüchtete er vor der Volksherrschaft nach Metapont, wo 471 seine Schule durch die Demokratie umzingelt und in Brand gesetzt wurde. Pythagoras selbst entkam den Flammen, starb aber kurz darauf in seinem 99. Lebensjahre.

Die mathematischen Leistungen der pythagoräischen Schule hängen aufs innigste mit ihren philosophischen Grundsätzen zusammen. So berichtet uns Proklos in seinem Kommentar zum Euklid: „Nach diesen (Thales etc.) gab Pythagoras dem Wissenszweige der Mathematik die Gestalt einer freien Wissenschaft, indem er die Prinzipien derselben von höherem Gesichtspunkte aus betrachtete und die Theoreme derselben in materieller und intellektueller Hinsicht erforschte. Er ist es auch, der die Theorie des Irrationalen und die Konstruktion der regelmässigen (kosmischen) Körper erfand." Mit andern Worten: Pythagoras hat zuerst die Geometrie von der steten Rücksicht auf das praktische Leben abgelöst und sie zu einer rein theoretischen Erkenntnis, zu einer Wissenschaft erhoben und derselben die sogenannte synthetische Behandlungsweise zugeeignet.

„Die Geometrie bestand, ihrer Entstehung gemäss, aus einzelnen Sätzen, die unter sich in einen künstlichen Zusammenhang gebracht wurden in der Art, dass jeder folgende Satz den vorhergehenden voraussetzte. Bevor eine solche Reihe vollständig vorhanden war, muss es einzelne Sätze gegeben haben, welche, obgleich nicht streng erwiesen, doch als richtig vorausgesetzt wurden, weil dies entweder der Augenschein lehrte oder weil sie sich beim Erproben als wahr zeigten; doch wurden zuletzt auch diese Lücken durch strenge Beweise ausgefüllt. Die Art der Darstellung war nun folgende: voraus stand der Satz, in seiner Voraussetzung und Behauptung scharf ausgedrückt. Wenn eine Figur die Eigenschaft $A$ hat, so hat sie auch die Eigenschaft $B$. Die Behauptung musste nun bewiesen werden, es folgte daher im zweiten Teile der Beweis. Zur Beweisführung gehörte nun das Ziehen gewisser Hülfslinien, wodurch man in stand gesetzt wurde, den Beweis des Satzes auf frühere Sätze zurückzuführen. Hier wurde nun eine Forderung gestellt, und es musste eine Konstruktion ausgeführt werden. Gehörte die Forderung unter die, welche man als unmittelbar ausführbar sich dachte, so genügte die blosse Angabe, im andern Fall aber musste erst gezeigt werden, wie die Forderung erfüllt werden könne. Diese Forderungen führten nun zu einer andern Klasse von Sätzen, den Problemen; ein Problem ist aber das Vorgelegte, zu Lösende, die Aufgabe. Ein solcher Satz bestand aus drei Teilen, der eigentlichen Aufgabe, in welcher ausgesprochen wurde, was geleistet werden sollte, dann kam die Auflösung, eine genaue und deutliche Vorschrift zur Ausführung der Zeichnung, zuletzt folgte der Beweis, dass durch die Vorschrift erreicht werde, was gefordert wurde. Wenn nun ein Theorem im Beweise eine solche Konstruktion forderte, so musste das bezügliche Problem vorausgegangen sein, und deshalb war die Reihe der Theoreme mit Problemen untermischt. So war die griechische Geometrie der ersten Zeit im allgemeinen beschaffen und wenn man auf ihre Entstehungsweise zurücksieht, so wird man erkennen, dass alle ihre Eigentümlichkeiten sich notwendig so entwickeln mussten. Die aphoristische, spruchweise oder lehrsätzliche Form ist nicht etwa mit Bewusstsein und vorsätzlich als die der Geometrie am angemessensten gewählt und ausgebildet worden; sie erklärt sich vielmehr einfach daraus, dass eben den Griechen die Theoreme zum Teil schon geboten wurden und sie dann dafür die Beweise erfinden mussten. Hier ist aber noch zu beachten, dass die Geometrie nicht ihrer Anwendung wegen kultiviert wurde; sie wurde als eine reine Geistesgymnastik betrachtet, das Erforschen der Eigenschaften der Figuren war ihr Zweck; das wirkliche Messen und die Darstellung der Grössen durch Zahlen lag dieser Richtung ferne." [1])

Der Satz, dass die Reihe der ungraden Zahlen Glied für Glied addiert, die Reihe der Quadratzahlen liefert, gab Pythagoras ein Mittel, rationale recht-

[1]) Arneth.

winklige Dreiecke zu bilden. Proklos gibt die Regel folgendermassen an: „Es werden auch einige Methoden mitgeteilt, solche Dreiecke zu finden, deren eine man auf Platon, die andere, welche von ungeraden Zahlen ausgeht, auf Pythagoras zurückführt. Man nimmt nämlich die gegebene ungerade Zahl als die kleinere Kathete an, von dem Quadrat derselben die Einheit subtrahiert und der Rest halbiert, gibt die grössere Kathete; zu dieser die Einheit addiert, gibt die Hypotenuse. Man nimmt z. B. 3; von dem Quadrat 9 nimmt man die Einheit weg und halbiert den Rest 8, gibt 4; dazu addiert man wiederum die Einheit, was 5 macht, und es wird somit das rechtwinklige Dreieck gefunden, was zu Seiten die Zahlen 3, 4 und 5 hat."

Da dem Pythagoras die Kenntnis des Satzes zugeschrieben werden muss, dass die Summe der auf einander folgenden ungeraden Zahlen die Reihe der Quadratzahlen liefert, so ergab sich seine Regel von selbst, wenn er in der untersten Reihe diejenigen Zahlen aussuchte, welche selbst Quadratzahlen sind. Die Grundzahlen der letztern gaben ihm stets die kleinere Kathete, während die beiden über ihr stehenden und sie einschliessenden Zahlen die Quadrate der beiden andern Seiten und somit letztere selbst lieferten:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25

Mit diesen arithmetischen Kenntnissen hängen die ersten geometrischen Erfindungen der Pythagoräer aufs engste zusammen. Proportionen hatten in der Geometrie die Aehnlichkeitssätze zur Parallele; desgleichen ist die Verwandlung eines Rechtecks in ein gleichflächiges Quadrat und damit die Lösung der Aufgabe, zwischen zwei gegebenen Geraden die mittlere Proportionale zu finden, die nächste Folge der Proportionslehre. Der dazu nötige Satz vom rechten Winkel im Halbkreise war bereits von den Aegyptern ermittelt und sicher auch dem Pythagoras bekannt. Vor der Zeit, zu welcher die Kenntnis der pythagoräischen Mathematik in die Oeffentlichkeit gelangte, also namentlich bei Thales und seinen Schülern, findet sich nicht eine Spur von der Proportion und ihrer Anwendung. Thales berechnete die Höhe eines Gegenstandes nicht mittels der Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, sondern durch Messung einer Horizontalen, welche jener Höhe gleich war. Die Proportionslehre hatte also noch keinen Eingang in die Geometrie gefunden. Letzteres bewirkt zu haben, ist daher unzweifelhaft das Verdienst des Pythagoras und seiner unmittelbaren Schüler, die damit zuerst den Begriff der Aehnlichkeit in die Geometrie einführten, wenn sie denselben vor der Hand auch nur auf geradlinige Figuren anzuwenden wussten. Plutarch schreibt dem Pythagoras die Lösung des Problems zu, zu zwei gegebenen Figuren eine dritte zu konstruieren, die der einen gleich und der andern ähnlich sei. Pythagoras soll, als er die Lösung gefunden, ein Opfer gebracht haben. „Und wirklich ist es auch feiner und wissenschaftlicher als das, dass das Quadrat der Hypotenuse dem der beiden Katheten gleich ist." Inwiefern dem Pythagoras selbst das Verdienst dieser Erfindung zukommt, ist schwer zu entscheiden; wohl aber sind wir durch die späteren Leistungen seiner Schüler darauf hingewiesen, die Entstehung derselben in die ersten Zeiten der Schule zurückzuversetzen. Mit der Lehre von arithmetischen Progressionen steht im Zusammenhang die Erfindung des altberühmten Lehrsatzes, dass die Quadrate der Katheten demjenigen der Hypotenuse gleich sind, die von allen Schriftstellern des Altertums übereinstimmend dem Pythagoras zugeschrieben wird. „Da dieser Satz sicher schon viel früher bekannt war, so kann man wohl nur sagen, er habe denselben zuerst bewiesen."[1]) Die Angaben

[1]) Cantor.

des Diogenes Lärtios und des Plutarch, dass er aus Freude darüber einen Stier oder wie andere gar meinen, hundert Stiere geopfert habe, gehören wahrscheinlich ins Gebiet der Fabel, denn sie widersprechen vollständig den Prinzipien und Lehren der pythagoräischen Philosophie. Schon Cicero nahm daher an jener Anekdote Anstoss und in der spätesten Tradition der Neupythagoriker wird das blutige Opfer durch das eines „aus Mehl geformten Ochsen“ ersetzt.

Als wichtig ist hier zu erwähnen (was Cantor bemerkt), dass der pythagoräische Lehrsatz, geknüpft an die Zahlen 3, 4, 5, in identischer Weise in Griechenland und China erscheint, wie aus einer Schrift mit dem Titel Tschaou pi, d. h. Schenkelbein des Tschaou, hervorgeht, die um 1100 v. Chr. entstanden ist und in welcher es unter anderem heisst: Tschaou-kong, chinesischer Kaiser um 1100 v. Chr., sagte einmal zum Schang-kaou: „Ich habe vernommen, Herr, du seiest in den Zahlen sehr bewandert, daher möchte ich dich fragen, wie der alte Fo-hi die Grade an der Himmelskugel festgestellt hat. Es sind ja doch keine Stufen vorhanden, auf welchen man den Himmel ersteigen kann, und Richtschnur und Mass von der Grösse der Erde lassen sich auf den Himmel nicht anwenden. Deshalb wünschte ich zu erfahren, wie er diese Zahlen feststellte.“ Schang-kaou erwiderte: „Die Kunst zu zählen ist auf den Kreis und auf das Viereck zurückzuführen. Zerlegt man daher einen rechten Winkel in seine Bestandteile, so ist eine die Endpunkte seiner Schenkel verbindende Linie, wenn die Basis = 3 und die Höhe = 4 ist, gleich 5.“ Tschaou-kong rief aus: „In der That, das ist vortrefflich!“

Arneth gibt in seiner „Geschichte der reinen Mathematik“ den Inhalt der erwähnten Schrift etwas ausführlicher und zwar folgendermassen an:

Ehemals fragte Tcheu-kong den Chang-kao und sagte zu ihm: Ich habe sagen hören, dass Chang-kao in den Wissenschaften der Zahlen erfahren ist; ich wünsche nun von ihm zu wissen, wie es einstens dem Fo-hi möglich war, den Himmel und die Erde zu erforschen. Der Himmel ist so weit und keine Stufen führen zu ihm und die Erde ist so gross, mit unsern Massen messen wir sie nicht aus! — Möge er mir sagen, wie es um die Wissenschaft der Zahlen steht! — Chang-kao sagte: Die Wissenschaft der Zahlen kommt von dem Yuen (Kreise) und von dem Fong (Rechteck oder Quadrat), der Kreis kommt von dem Quadrat und das Quadrat von dem Kreise. Das Kuu (ein unbekanntes Instrument) kommt von 9 mal 9, welches 81 macht. — Teile das Kuu. — Mache die Breite gleich 3, die Länge gleich 4, die Linie, welche die Winkel verbindet, gleich 5. — Von dem Rechtecke, durch die Ecken, nehme die Hälfte: diese wird ein Kuu sein. — Verbinde die Punkte und berechne, und du wirst genau 3, 4 und 5 erhalten. — Die zwei Kuu zusammen machen eine Länge von 25, dies ist, was man die Summe der Kuu nennt. — Die Wissenschaft, deren sich einst Yao bediente, die Erde zu ordnen, ist aus diesen Zahlen hervorgegangen. Tcheu-kong sagte: Es ist eine grosse Sache um die Zahlen. Ich möchte euch aber auch fragen über die Art, das Kuu anzuwenden. — Chang-kao sagte: Das ebene Kuu dient, um den Horizont zu machen, das Yen-kuu, um Höhen zu messen, das Fo-kuu, die Tiefe zu erforschen, das Ngo-kuu, die Entfernungen zu bestimmen, das Hoan-kuu (kreisförmige Kuu) dient, um Kreise zu machen, das Ho-kuu (vereinigte Kuu), um Quadrate zu machen. — Die viereckige Figur entspricht der Erde, die runde Figur dem Himmel, der Himmel ist der Kreis, die Erde das Quadrat. — Die Berechnungen des Quadrates bilden die Grundlage, vom Quadrate kommt der Kreis. Durch einen Sonnenschirm kann der Himmel dargestellt werden. — Der Himmel ist blauschwarz, die Erde ist rotbraun. Um den Himmel zu berechnen, wende die Gestalt des Sonnenschirmes an. — Das Blauschwarz ist die äussere Bekleidung, das Rotbraun ist die innere Bekleidung.

Durch dieses stellt man die Einrichtung des Himmels und der Erde vor. — Also, wer die Erde kennt, hat die Wissenschaft, wer den Himmel kennt, hat die höchste Wissenschaft. — Das Wissen kommt vom rechtwinkligen Dreieck, das rechtwinklige Dreieck kommt von dem Kuu. Das Kuu, wenn es verbunden wird mit den Zahlen, dies ist es, welches ordnet und alle Dinge leitet. — Tcheu-kong sagte: Dies ist bewundernswürdig! —

Dieses Gespräch kann wohl einen richtigen Begriff geben von dem Zustande der Mathematik in China vor jetzt beinahe 3000 Jahren, das kindlich Wichtige und Unbedeutende lässt uns auch an der Aechtheit und dem Alter nicht zweifeln. Wir lernen aber daraus so viel, dass sie ein Instrument zum Messen hatten, welches je nach seiner verschiedenen Anwendung auch verschiedentlich gestaltet war, obschon der Grundlage nach immer dasselbe.

Aus dem weiteren Inhalte dieser Schrift geht hervor, dass die Chinesen in so früher Zeit schon Messungen veranstalteten, welche der Trigonometrie zum Verwechseln ähnlich sehen, indem man sich des rechten Winkels dazu bediente, der aufgerichtet, umgekehrt oder horizontal liegend angewandt wurde, je nachdem es sich darum handelte, Höhen, Tiefen oder Entfernungen zu messen.

„Man hat es hier mit einem Produkte aus der ersten Zeit des mathematischen Denkens zu thun, in welcher der Gedanke vergebens nach Klarheit und Bestimmtheit ringt und das Geheimnisvolle der in der Aussenwelt zur Erscheinung kommenden Mathematik, das unserem aufgeklärten Zeitalter verloren gegangen ist, selbst den Eingeweihten noch gefesselt hält.“ [1])

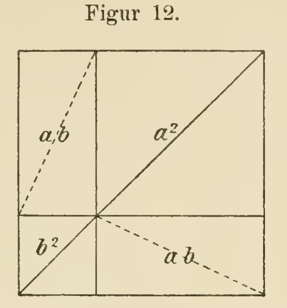
Es sei nebenbei bemerkt, dass in alten Zeiten das ganze chinesische Land in Quadrate, ein Li [2]) im Geviert, geteilt war, von denen jedes neunte von den umliegenden Familien gemeinschaftlich zum Besten des Kaisers bestellt werden musste, und können hieraus auf obrigkeitliche Feststellung der Grenzen und somit auch auf die Existenz feldmesserischer Regeln schliessen.

Also die Chinesen waren mit demselben rechtwinkligen Dreieck aus den Seiten 3, 4 und 5 bekannt, welches in der Mathematik des Pythagoras eine so wichtige Rolle spielt. Cantor nimmt an, dass Pythagoras durch Summation von Reihen, z. B. der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25 etc., zu dem Resultat kommen musste, dass $9 + 16 = 25$ und dass denn die Zahlen 3, 4, 5 und ihre Quadrate dem Augenmerke des Pythagoras vor allen andern Zahlen gekennzeichnet waren. Wenn er nun bei dem babylonisch-chinesischen Verkehr in Babylon erfuhr, dass dieselben Zahlen auch die Längen der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, so musste Pythagoras auch hier den Versuch machen, jetzt, wo die Zahlen 3, 4, 5 geometrische Bedeutung annahmen, den Satz $3^2 + 4^2 = 5^2$ auch geometrisch zu beweisen, und so fand er, dass der Satz von der Gleichheit des Quadrats der Hypotenuse mit der Summe der Quadrate der beiden Katheten nicht bloss bei dem einen Dreieck 3, 4, 5 stattfand, sondern dass er eine gemeinschaftliche Eigenschaft aller rechtwinkligen Dreiecke entdeckt hatte. Wie er den Beweis führte, wissen wir allerdings nicht mehr, da der zu diesem Satze in Euklids Elementen gegebene Beweis von Letzterem selbst herrührt und die pythagoräische Schule diesen Lehrsatz auf andere Weise abgeleitet hat, als wir ihn bei Euklides finden. In Bezug auf dessen Beweis sagt Proklos: „Ich bewundere zwar auch die, die zuerst der Wahrheit dieses Problems nachgeforscht haben; mehr aber noch schätze ich den Verfasser der Elemente, nicht nur, weil er das Theorem mit dem bündigsten Beweise versah, sondern auch, weil er das im VI. Buche enthaltene noch allgemeinere Theorem durch die unwiderlegbarsten Gründe der Wissenschaft feststellte.

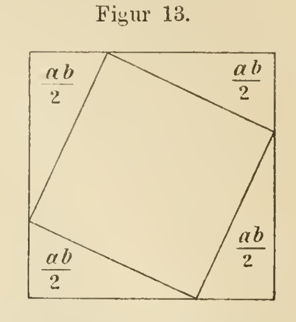
[1]) Hankel. — [2]) Li, chinesisches Landesmass, jetzt 180 Tschang à 2 Pu = 557 m, im 7. Jahrh. n. Chr. nur 329 m.

Nach Bretschneiders Ansicht haben die Pythagoräer gewiss die geometrische Darstellung der Formel $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ besessen. Nun sind aber die beiden Rechtecke $ab$ in 4 kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegbar, in deren jedem die Summe beider Katheten der Seite des gegebenen Quadrats gleich ist. Werden aber diese 4 Dreiecke mit ihren rechten Winkeln in die Ecken des Quadrats gelegt, so dass immer eine grössere und kleinere Kathete zusammenstossen, so bilden die 4 Hypotenusen das Quadrat der letzteren, was demnach der Summe der Kathetenquadrate $a^2 + b^2$ gleich sein muss. Diese oder eine ähnliche Ableitung des berühmten Satzes erfordert keine andern Kenntnisse und Methoden als solche, welche bei Pythagoras bereits erwähnt sind.

Figur 12.




Figur 13.




Eine unmittelbare Folge der beliebten Zahlenspekulationen in Verbindung mit dem entsprechenden Dreieckssatze war die Entdeckung, dass es Linien gibt, deren gegenseitiges Verhältnis durch keine Zahl angegeben werden kann, dass mithin auch Zahlwerte existieren, welche kein angebbares Verhältnis zur Einheit besitzen. Die somit bewirkte Auffindung inkommensurabler Grössen und irrationaler Zahlen ist eines der grössten Verdienste, welche das Altertum dem Pythagoras zuschreibt. Nach Platon ist die Vervielfachung eines gegebenen Quadrates und damit die Inkommensurabilität der meisten dieser Quadratseiten, sowohl untereinander als auch mit der Seite des einfachen Quadrats, ein Lieblingsstoff für die Geometer der pythagoräischen Schule gewesen.

„Wenn wir sehen, welche ausserordentliche Schwierigkeit das Altertum in dem Gedanken des Stetigen fand und wie in dieser Inkongruenz der Reihe der stetigen Grössen und der Zahlen selbst bis auf heute noch ein ungelöster Widerspruch liegt, so müssen wir die Idee des Irrationalen für eine der grössten Entdeckungen des Altertums halten. Und wenn die ältesten Pythagoräer wirklich diese Idee entdeckt haben, so ist es in der That nicht unwahrscheinlich, dass sie diese als ein Geheimnis sorgfältig verwahrten, wie uns denn in späteren Zeiten erzählt wird, „dass derjenige, welcher zuerst die Betrachtung des Irrationalen aus dem Verborgenen in die Oeffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei und zwar: weil das Unaussprechliche und Bildlose immer verborgen werden sollte und dass der, welcher von ungefähr dieses Bild des Lebens berührte und aufdeckte, in den Ort der Mütter versetzt und dort von ewigen Fluten umspült wurde. Solche Ehrfurcht hatten diese Männer vor der Theorie des Irrationalen.“

Der Beschäftigung mit den Polygonalzahlen entspricht auf dem Felde der Geometrie ein Abschnitt, dem die Pythagoräer besondere Aufmerksamkeit zu teil werden liessen, nämlich die Lehre von den regelmässigen Vielecken und regulären Körpern. Diese letzteren dienten ihnen als Symbole für die Elemente der physischen Welt, wie uns Platon (s. d.) im Timäos lehrt. — „Körper wie der Würfel, das Tetraeder, das Oktaeder müssen noch weit über das Zeitalter des Pythagoras zurück sich als den Aegyptern bekannt vermuten lassen. Wer bei ihnen jahrelang verweilte, ja wer nur kurze Zeit die Baudenkmäler ihres Landes in Augenschein nahm, dem ist auch die Kenntnis jener Körper mit Notwendigkeit zuzusprechen. Auch das Ikosaeder und Dodekaeder muss den Pythagoräern bekannt gewesen sein,

sonst könnte Philolaus nicht von den 5 Körpern in der Kugel reden, sonst würden nicht andere übereinstimmende Berichte so deutlich sämtliche kosmische oder regelmässige Körper als pythagoräische bezeichnen. Mit den Angaben über die 5 Körper im engsten Zusammenhange stehen die über die Kugel, in welche jene beschrieben gedacht sind und welche demzufolge nebst einigen ihrer Eigenschaften gleichfalls den Pythagoräern bekannt gewesen sein muss. In demselben Zusammenhange erscheinen Angaben, welche sich auf die Grenzflächen jener Körper, auf die regelmässigen Vielecke beziehen." [1])

Unter allen ebenen Figuren war das rechtwinklige Dreieck, das aus der Halbierung des gleichseitigen entstand, bei den Pythagoräern das schönste und vollkommenste, weshalb sie sich alle regelmässigen Vielecke, überhaupt die ganze Ebene um einen Punkt herum, aus solchen Dreiecken zusammengesetzt dachten. Wie verhält es sich aber mit dem regelmässigen Fünfeck? Dieses lässt sich nicht wie Quadrat und Sechseck aus rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen, wohl aber finden sich bei Plutarch und andern Spuren von verfehlten Versuchen, die Grenzfläche des Dodekaeders in 30 Elementardreiecke zu zerlegen. Bei dieser Zerlegung tritt aus dem Gewirre der Linien am deutlichsten das Sternfünfeck heraus, welches aber unter den Pythagoräern das Erkennungszeichen gewesen sein soll, und es lässt sich deshalb mit Recht vermuten, dass das regelmässige Fünfeck von den Pythagoräern selbst entdeckt worden sei. Aus ägyptischer und chaldäischer Zeit findet sich eine Zerlegung der Kreisfläche in 5 reguläre Ausschnitte nicht und die Einzeichnung des Fünfecks in den Kreis konnte geometrisch genau erst dann erfolgen, als der Satz von den Quadraten der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, als zugleich auch der goldene Schnitt bekannt geworden war. Letzterer spielte in der griechischen Baukunst der perikleischen Zeit eine nicht zu verkennende Rolle. Das ästhetisch wirksamste Verhältnis, und das ist das stetige, ist in den athenischen Bauten aus den Jahren 450 bis 430 aufs schönste verwertet.

Figur 14.

Figur 15.

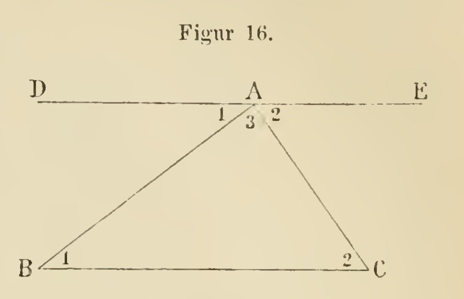
Proklos erwähnt in seinem Kommentar zu Euklides, dass die Ebene um einen Punkt herum durch 6 gleichseitige Dreiecke, 4 Quadrate oder 3 regelmässige Sechsecke vollständig erfüllt werde, so dass es möglich sei, die ganze Ebene in jede dieser drei Figurengattungen zu zerlegen, und fügt am Schlusse bei: „Dies ist ein Pythagoräisches Theorem." Hieraus folgt notwendigerweise, dass die Pythagoräer oder vielmehr schon die Aegypter gewusst haben müssen, dass die Summe der Winkel um einen Punkt herum vier Rechte, also die über einer Geraden zwei Rechte beträgt, woraus sich von selbst ergibt, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks $= 2R$ ist. Auf welche Weise die Aegypter, Thales und die jonische Schule, das letztere bewiesen haben, ist nicht bekannt (s. Thales); dagegen hat uns Proklos noch den Beweis erhalten, durch welchen die Pythagoräer den fraglichen Lehrsatz für jede beliebige Dreiecksgattung dargethan haben. Er sagt: Der Peripatetiker [2]) Eudemos schreibt die Erfindung dieses Theorems den Pythagoräern zu, dass die Innenwinkel jedes Dreiecks zweien Rechten gleich sind, und berichtet, dass sie diesen Satz folgendermassen bewiesen haben: Es sei $ABC$ ein Dreieck; man ziehe durch $A$ die $DE$ parallel zu $BC$, so sind die Wechselwinkel gleich: $\angle A_1 = \angle B_1$ und $\angle A_2 = \angle C_2$; es

[1]) Cantor. — [2]) Anhänger der Lehre des Aristoteles.

werde der gemeinschaftliche $\angle A_3$ addiert, dann sind die Winkel $A_1$, $A_3$, $A_2$. d. h. $\angle DAB + \angle BAE$, d. h. $2R$ = den 3 Winkeln des Dreiecks."

Aus dem Prinzip, alle ebenen Figuren auf Dreiecke zurückzuführen, entwickelten sich wohl die Theoreme über das Vergleichen und Anlegen von Flächen, deren Erfindung ebenfalls den Pythagoräern beigelegt wird, wie z. B. der Satz, ein Parallelogramm einem gegebenen Dreieck gleich unter einem gegebenen Winkel an eine Gerade anzulegen. Die einfachsten Sätze von Winkeln, Parallelen, Dreiecken und Parallelogrammen müssen demjenigen bekannt sein, der das Parallelogramm in der angegebenen Weise zerlegen will; ebenso sind die Flächenvergleichungen von Dreiecken, Parallelogrammen und Trapezen notwendige Voraussetzungen für das Anlegen dieser Figuren an gegebene Gerade. Dass die Gesamtheit dieser Lehren aber nicht griechischen, sondern ägyptischen Ursprungs und höchstens in einzelnen Punkten von Pythagoras erweitert und vervollständigt, vielleicht auch strenger bewiesen worden ist, lässt sich um so weniger bezweifeln, als bereits Thales einen Teil dieses Wissens besass. Auch Pythagoras hat dieses Gebiet geometrischer Kenntnisse aus der Fremde mit heimgebracht, aber jedenfalls in grösserer Vollständigkeit und mit tieferem Verständnis als Thales.[1])

Figur 16.




Dass die Pythagoräer den Flächeninhalt einer Figur aus den dieselbe bildenden Seiten in richtiger Weise zu finden vermochten, bedarf besonderer Betonung, da selbst hochgebildete Laien nach vielfachen geschichtlichen Beweisen der Ansicht waren, dass formverschiedene Figuren von gleichem Umfang auch inhaltsgleich sein müssten.

Montucla bezeichnet in seiner Geschichte der Mathematik den Pythagoras als den Erfinder der Lehre von der Isoperimetrie oder Umfangsgleichheit, und schliesst dies aus den Worten des Diog. Lärtios: „unter den Körpern sei der edelste die Kugel, unter den ebenen Figuren der Kreis." Allerdings ist es, wie Bretschneider sagt, rein unbegreiflich, wie Montucla diesen Satz mit jenem zusammenschmelzen konnte, dass die Kugel unter allen Körpern von gleicher Oberfläche den grössten Inhalt, der Kreis unter allen Figuren von gleichem Umfange die grösste Fläche hat; zumal jene Angabe des Diog. Lärtios den Charakter der pythagoräischen Schule so offenkundig an sich trägt und ihr wahrer Sinn lautet: Da bei Kreis und Kugel jeder Punkt des Umfangs und der Oberfläche vom Mittelpunkte gleich weit entfernt, die Krümmung beider Grenzgebilde also eine durchaus gleichförmige ist, so dass bei einer Drehung derselben um das Centrum der Kreisumfang wie die Kugelfläche nicht aufhören, fortwährend sich selbst zu decken, so wird dem Kreis und der Kugel von den Pythagoräern um deswillen Vollkommenheit beigelegt. Allein es könnte immerhin der Fall sein, dass auch diese philosophische Theorie wie andere die Pythagoräer auf die Auffindung verwandter geometrischer Wahrheiten geführt hätte, doch sind nicht die geringsten Anzeichen für die Annahme vorhanden, dass schon zu jener Zeit die Lehre von der Isoperimetrie bekannt gewesen wäre.

Oenopides von Chios, welcher um 470 v. Chr., also unmittelbar nach dem Tode des Pythagoras dessen Lehren studierte und nachbildete, soll nach Proklos, resp. Eudemos, der Erfinder der elementaren Aufgaben sein: von einem

[1]) Bretschneider.

Punkte ausserhalb einer Geraden eine Senkrechte auf diese letztere zu fällen, an eine Gerade einen gegebenen Winkel anzulegen, sowie einen Winkel in 2 gleiche Teile zu teilen. Zur ersten Aufgabe bemerkt Proklos: „Diese Aufgabe hat zuerst Oenopides aufgelöst, da er sie als für die Astronomie nützlich erkannte. Er nennt aber die Senkrechte nach altertümlicher Weise einen Gnomon, weil, wie dieser rechtwinklig auf dem Horizonte steht, so auch eine Senkrechte auf einer gegebenen Geraden rechtwinklig ist, wobei sie sich nur durch die Richtung unterscheidet, indem die Senkrechte, wie er sagt, gegen die unter ihr liegende Gerade keine von jener verschiedene Lage hat. Suter bemerkt dazu: „Sollten diese Angaben richtig sein, könnten wir nicht umhin, den Zustand der Geometrie zu jener Zeit noch einen sehr primitiven zu nennen. Allein da die Blüte des Pythagoras vor die Mitte des V. Jahrhunderts, also vor Oenopides fällt, so müssen wir entweder diese Angabe des Eudemos als unrichtig betrachten oder seine, des Oenopides, Lebenszeit viel weiter hinaufrücken. Bretschneider schreibt: „Von der ersten Aufgabe lässt sich allerdings annehmen, dass irgend eine einfache Lösung derselben, aber vielleicht mit Anwendung ganz spezieller Hilfsmittel, schon dem Thales bekannt sein musste, und so konnte es immerhin als eine Bereicherung der Wissenschaft angesehen werden, wenn Oenopides das verlangte Lot als eine vom Centrum eines Kreises nach der Mitte einer Kreissehne gezogene Gerade konstruieren lehrte," während Cantor meint, „er muss noch Anderes und Bedeutenderes geleistet haben, was wir aber nicht kennen, sonst wäre Oenopides von Platon nicht so hoch gestellt worden." — Von den Alten wird Oenopides ganz ausdrücklich unter denen genannt, die nach Aegypten gereist sind, um dort Studien zu machen.

Verfolgen wir nun weiter die Entwickelung der Geometrie unter den Schülern des Pythagoras bis auf Platon. Obgleich uns nur wenig Namen von hervorragenden Förderern der Geometrie während jener Zeit bekannt sind, so tritt doch der Charakter derselben deutlicher hervor als in irgend einer früheren Periode. Der Grund hierfür liegt in der Vereinigung aller wissenschaftlichen Kräfte auf die Lösung dreier Probleme, die das ganze Altertum hindurch die Aufmerksamkeit der grössten Geometer auf sich gelenkt haben: Die Teilung eines Winkels in mehr als 2 gleiche Teile, die Verdoppelung des Würfels und die Quadratur des Kreises. Es stehen diese Aufgaben im nächsten Zusammenhange mit den Fortschritten und Bestrebungen der vorhergehenden Zeit, mit der Lehre von den Proportionen und den Flächenverwandlungen. Man suchte jene Sätze über ebene geradlinige Figuren auch auf den Kreis und auf die Gebilde des Raumes auszudehnen, stiess aber dabei auf so bedeutende Schwierigkeiten, dass nur einige hervorragende Männer sich an die Beschäftigung mit diesen Problemen wagten und dieselben daher eine geraume Zeit zu ihrer vollständigen Entwickelung bedurften. [1])

Proklos nennt uns in seinem Kommentar zum Euklid den Mathematiker Hippias von Elis, einen Zeitgenossen des Sokrates, als den Erfinder einer Kurve, durch welche die Drei- oder Mehrteilung eines Winkels ermöglicht werde. Die eine Stelle heisst: „Nikomedes hat jeden geradlinigen Winkel gedritteilt mittelst der conchoidischen Linien, deren eigentümlicher Natur Entdecker er ist und von denen er Entstehung, Konstruktion und Eigenschaften auseinandergesetzt hat. Andere haben dieselbe Aufgabe mittelst der Quadratricen des Hippias und Nikomedes gelöst, indem sie sich der gemischten Kurven bedienten, die eben den Namen Quadratrix führten; wieder Andere teilten einen Winkel nach gegebenem Verhältnisse, indem sie von den Archimedischen Spirallinien ausgingen." Eine zweite Stelle lautet: „Ganz auf die nämliche Weise pflegen auch die übrigen

[1]) Suter.

Mathematiker die Kurven zu behandeln, indem sie das jeder Eigentümliche auseinandersetzen. So zeigt Apollonius das Eigentümliche jedes Kegelschnittes, Nikomedes dasselbe für die Conchoiden, Hippias für die Quadratrix, Perseus für die Spiren.“ Hieraus dürfte sich mit Bestimmtheit folgern lassen, dass Hippias um 420 eine Kurve erfunden hat, welche später von Dinostratus und andern zur Quadratur des Kreises angewandt wurde und von letzterer Anwendung den Namen Quadratrix (s. Dinostratus) erhielt.

Alles, was Pythagoras und seine Jünger miteinander gefunden und entdeckt hatten, blieb anfänglich strenges Geheimnis der Bundesglieder. Als aber nach langen Kämpfen die Demokratie den Sieg davontrug, da wurden die aristokratischen Pythagoräer vielfach verbannt und ihres Vermögens beraubt, und waren nunmehr gezwungen, in bitterer Not ihren täglichen Unterhalt durch Unterrichterteilung zu gewinnen. Damit kam ein neues Leben in das Studium der Mathematik, und schon bei Hippokrates von Chios finden wir die Geometrie in einem höchst erfreulichen Fortschritt begriffen. Derselbe ist unstreitig der grösste Geometer von Pythagoras bis Platon. Das Problem der Verdoppelung des Würfels wie dasjenige der Quadratur des Kreises verdanken ihm bedeutende Fortschritte. Ursprünglich Kaufmann, welcher Handel zur See trieb, zeigte er so wenig Anlagen für seinen Beruf, dass er auf die gröbste Weise betrogen wurde, wodurch er in seinen Verhältnissen bedeutend herunterkam. Um sich wieder etwas aufzuhelfen, ging er nach Athen, welches der Sammelplatz der grossen Geister Griechenlands geworden war und damit sowohl in politischer als geistiger Grösse über alle Staaten hervorragte, und lernte daselbst zum erstenmal die Geometrie kennen, welcher er sich nunmehr ganz hingab. Seine Blüte fällt in die Zeit um 440 v. Chr. Er schrieb zuerst Elemente der Geometrie, die zu seiner Zeit viel galten, aber durch Euklids Elemente überwunden und der Vergessenheit preisgegeben wurden. Wir finden bei Hippokrates zum erstenmal die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren in ihren Anfängen. Aus der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie zweier gleichschenkligen Dreiecke wird auch die Proportionalität der Seiten geschlossen. Ob aber damals schon die Bedingungen der Aehnlichkeit ungleichseitiger Dreiecke bekannt waren, lässt sich nicht ausmachen. Was seine Verdienste um die Verdoppelung des Würfels anbetrifft, so wissen wir darüber nichts Näheres, als was uns Proklos in seinem Kommentar zum Euklid berichtet. Es sollte nämlich bei der Aufgabe ein Würfel hervorgebracht werden, welcher dem Inhalte nach genau das Doppelte von einem gegebenen Würfel wäre. Hippokrates soll hier die Entdeckung gemacht haben, dass es bei der Auflösung darauf ankomme, zu 2 gegebenen geraden Linien 2 mittlere Proportionallinien zu finden, wovon dann eine die Seite des gesuchten Würfels sei. Denn das Verhältnis zweier Würfel ist das Dreifache ihrer Seiten. In der stetigen Proportion $a:b:c:d$ ist das Verhältnis $a:d$ auch das Dreifache des Verhältnisses $a:b$, indem es aus den 3 gleichen Verhältnissen $a:b$, $b:c$, $c:d$ zusammengesetzt wird. Sind $a$ und $b$ die Seiten zweier Würfel, so verhalten sich diese Körper wie $a:d$ und umgekehrt; ist das Verhältnis der Würfel gegeben, so ist das Verhältnis ihrer Seiten das von $a:b$ oder $c:d$, wo $b$ und $c$ die beiden mittleren Proportionalen zwischen $a:d$ sind.[1]) Diese können durch die gemeine Geometrie nicht gefunden werden; daher war die Aufgabe für die Alten von Wichtigkeit, indem sie zu Untersuchungen höherer Art führte. Sie ist auch

[1]) Sind die Seiten zweier Würfel 2 und 3, so sind ihre Volumina 8 und 27 oder $2^3:3^3$; nach Obigem $2:3:4\frac{1}{2}:6\frac{3}{4}$ oder

$$\begin{array}{llll} 8: & 12: & 18: & 27 \\ 2: & 3 & & \\ & 2: & 3 & \\ & & 2: & 3 \end{array}$$

durch Sagen von der Veranlassung dazu verherrlicht worden: Der König Minos habe seinem Sohn Glaukus ein Grabmal errichten lassen. Da die Bauleute es 100 Fuss lang, breit und hoch gemacht hatten, fand er es zu klein und verlangte, dass es noch einmal so gross sollte gemacht werden. Hier entstand die Frage, wie die Seiten zweier Würfel sich verhalten, deren einer doppelt so gross ist als der andere. Die zweite Sage lautet: Das Orakel des Apollo zu Delos habe zur Besänftigung des Zorns der Gottheit über einen gewissen Vorfall einmal befohlen, den Altar des Apollo, welcher ein Würfel war, zu verdoppeln. Da man dieses nicht zu bewerkstelligen wusste, habe man bei Plato dazu die Anweisung gesucht. Da man aber die Vergrösserung des Altars auf unrechte Weise gemacht und der Zorn der Gottheit nicht nachgelassen habe, so sei man bei wiederholter Anfrage belehrt worden, dass die Form kubisch bleiben müsse. Plato habe den an ihn Abgeordneten geantwortet, dem Gotte sei eigentlich an der Verdoppelung des Altars nichts gelegen; er verweise dadurch den Griechen ihre Gleichgültigkeit gegen die Geometrie, befehle ihnen dem Kriege zu entsagen und ermahne sie, sich der Erwerbung von Kenntnissen mit Ernst zu befleissigen. Eine brauchbare Antwort zu geben, war Platon aber selbst nicht im stande.

„Dem Leser wird vielleicht nichts leichter erscheinen als das, aus obiger Veranlassung als das **Delische** bezeichnete Problem zu lösen, d. h. die Seite eines Würfels zu bestimmen, dessen Kubikinhalt $= 2v$ (wenn das Volumen des gegebenen Würfels $v$ bedeutet), denn man braucht nur die Kubikwurzel aus 2 zu ziehen ($\sqrt[3]{2} = 1{,}25992$), um jene Seite zu erhalten. Aber eben wie man dies zu thun habe, war die Frage, welche die Alten in Verlegenheit setzte. Von einer näherungsweisen numerischen Bestimmung war in jener Zeit entfernt nicht die Rede, einmal weil die dazu notwendige Rechnung die Kräfte der damaligen Rechenkunst der Griechen weit überstieg, als auch, weil eine solche Lösung ihres näherungsweisen Resultats halber nicht für genügend angesehen worden wäre, endlich weil die irrationalen Grössen ein- für allemal von den Zahlen durch eine weite Kluft getrennt erschienen und eine solche Vermengung der Geometrie mit der Arithmetik für ganz unstatthaft galt, was Aristoteles folgendermassen ausspricht: „Man kann nicht etwas beweisen, indem man von einem andern Genus ausgeht, z. B. nichts Geometrisches durch Arithmetik ... Wo die Gegenstände so verschieden sind, wie Arithmetik und Geometrie, da kann man nicht die arithmetische Beweisart auf das, was den Grössen überhaupt zukommt, anwenden, wenn nicht die Grössen Zahlen sind, was nur in gewissen Fällen vorkommen kann.“ [1])

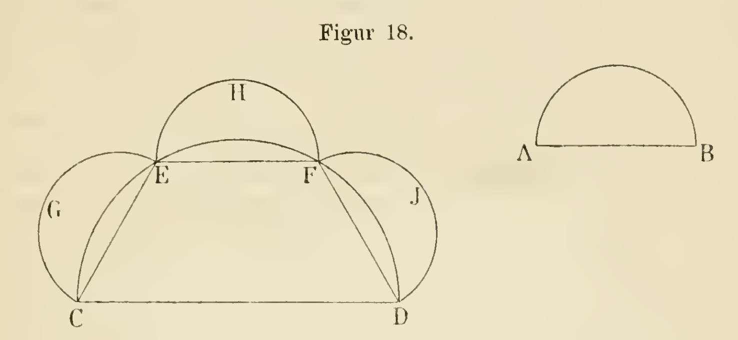
Des Hippokrates Hauptbeschäftigung war die Aufsuchung der **Quadratur des Kreises**. Aus dem Kommentar des Simplikios zu des Aristoteles Phisica erfahren wir, dass Hippokrates durch seine Quadratur des über der Quadratseite stehenden Mondes oder der sogen. lunula Hippocratis (die durch 2 sich schneidende Kreisbogen gebildete sichelförmige Figur) auf die Aufsuchung der Quadratur des Kreises geführt worden sein soll. Der Beweis ist folgender: Es sei über der Geraden $AB$ der Halbkreis $ABC$ beschrieben und die $AB$ in $D$ halbiert; in $D$ werde senkrecht auf $AB$ die $CD$ gezogen und von $C$ aus die Gerade $CA$; so ist diese Seite die Seite des in den Kreis einbeschriebenen Quadrats, von welchem $ABC$ Halbkreis ist. Ueber $AC$ beschreibe man nun den Halbkreis $AEC$.

Figur 17.

[1]) Hankel.

Da aber das Quadrat von $AB$ gleich ist dem von $AC$ und dem von der andern Seite des in den Halbkreis $ACB$ einbeschriebenen Vierecks, d. h. dem Quadrate von $CB$ (denn es ist $AB$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks) und da sich ferner die Quadrate der Durchmesser zu einander verhalten wie die zugehörigen Kreise und Halbkreise, so wird der Halbkreis $ACB$ das Doppelte des Halbkreises $AEC$ sein. Es ist aber der Halbkreis $ACB$ das Doppelte des Quadranten $ACD$, also der Quadrant dem Halbkreise $AEC$ gleich. Nimmt man daher das von der Vierecksseite und dem Bogen $AC$ eingeschlossene, beiden gemeinsame Segment weg, so ist der übrigbleibende Mond gleichflächig dem Dreiecke $ACD$, dieses Dreieck aber wieder einem Quadrate. Nachdem er auf solche Weise bewiesen hat, dass der Mond quadrierbar ist, versucht er demnächst mittels des Vorangehenden den Kreis folgendermassen zu quadrieren: Es sei $AB$ eine Gerade und über ihr ein Halbkreis beschrieben; man nehme $CD$ gleich dem

Figur 18.




Doppelten von $AB$, konstruiere über $CD$ einen Halbkreis und schreibe in ihn die Seiten $CE$, $EF$ und $FD$ eines Sechsecks ein, über denen man die Halbkreise $CGE$, $EHF$ und $FJD$ errichtet. Nun ist jeder dieser Halbkreise gleich dem Halbkreise über $AB$, da $AB$ den Seiten des Sechsecks gleich ist. Nun ist aber der Durchmesser das Doppelte des Halbmessers, die Seiten des Sechsecks sind aber dem Halbmesser gleich und $CD$ ist das Doppelte von $AB$; also sind die 4 Halbkreise einander gleich und zusammen das Vierfache des Halbkreises $AB$. Es ist aber der Halbkreis über $CD$ das Vierfache von dem über $AB$. Denn da die Gerade $CD = 2AB$ ist, so ist auch das Quadrat von $CD$ das Vierfache des Quadrates der $AB$. Wie nun die Quadrate der Durchmesser sich zueinander verhalten, so thun dies auch die Flächen der über ihnen stehenden Halbkreise. Es ist aber das Quadrat von $CD$ das Vierfache des Quadrates von $AB$, demnach auch der Halbkreis über $CD$ gleich den 4 Halbkreisen, nämlich dem über $AB$ und den dreien über den Seiten des Sechsecks stehenden. Man nehme nun die Segmente hinweg, die den über den Seiten des Sechsecks stehenden Halbkreisen und dem über $CD$ stehenden gemeinsam sind, nämlich die von den Seiten des Sechsecks und dem Bogen über $CD$ eingeschlossen werden, so sind die übrigbleibenden Monde $CGE$, $EHF$, $FJD$ mit dem Halbkreise über $AB$ zusammen gleich dem Trapeze $CEFD$. Wenn wir nun von diesem Trapeze den Ueberschuss hinwegnehmen, d. h. die den Monden gleiche Fläche (denn es ist nachgewiesen worden, dass es eine dem Monde gleiche geradlinige Figur gibt), so werden wir einen Rest behalten, der dem Halbkreise $AB$ gleichflächig ist. Diesen Rest, der eine geradlinige Figur ist, werden wir verdoppeln und das Doppelte quadrieren, d. h. in ein ihm gleichflächiges Quadrat verwandeln, und dies Quadrat wird dem um den Durchmesser $AB$ beschriebenen Kreise gleichflächig sein. Auf solche Art ist denn der Kreis quadriert.“

Simplikos folgt zuerst der Angabe des Alexandros Aphrodisias, nach welchem Hippokrates vermittelst der Monde über der eingeschriebenen Sechsecksseite die Quadratur des Kreises gefunden zu haben glaubte, dabei aber den Fehlschluss beging, dass er diesen Mond über der Sechsecksseite ohne weiteres als quadrierbar voraussetzte, was er doch nur von demjenigen über der Vierecksseite bewiesen hatte. Denn wäre jener Mond über der regelmässigen Sechsecksseite quadrierbar, so wäre die Fläche des Kreises auf diejenige einer geradlinigen Figur zurückzuführen. Nun aber berichtet Eudemos in seiner Geschichte der Geometrie, Hippokrates habe nicht nur den Mond über der Vierecksseite quadriert, sondern auch solche Monde in seine Untersuchung gezogen, deren äusserer Bogen grösser oder kleiner als ein Halbkreis ist, was den Hippokrates von jener Anklage eines Fehlschlusses wiederum zu reinigen scheint, indem wir daraus ersehen, dass er die Quadratur des Kreises in der That abhängig machte von der erst noch zu findenden Quadratur des Mondes über der Sechsecksseite. Auch geben uns die beiden von Simplikios angeführten Konstruktionen von Monden, deren äusserer Bogen grösser oder kleiner als der Halbkreis, einen zu vorteilhaften Begriff von dem geometrischen Wissen des Hippokrates, als dass wir ihn eines solch groben Irrtums fähig halten könnten;[1]) vielmehr dürfte[2]) der angebliche Irrtum einem vollständigen Missverständnisse zuzuschreiben sein, indem Hippokrates einfach gesagt haben kann: „Wenn der Mond über der Seite des Sechsecks quadriert werden kann, so ist damit auch die Quadratur des Kreises gefunden.“ Dieser von ihm bedingungsweise ausgesprochene Satz kann von Aristoteles als bedingungslos aufgefasst worden sein und ihn dadurch zu einem übereilten Tadel veranlasst haben. — Es blieb somit die gesuchte Quadratur unerledigt.

Diese für die damalige Zeit scharfsinnig ausgeführten Probleme geben ein ziemlich deutliches Bild von dem Zustande der Behandlungsweise der Geometrie in jener Periode. Aus der Betrachtung derselben ergibt sich, dass Hippokrates mit den hauptsächlichsten Sätzen über den Kreis vertraut gewesen sein muss, wie z. B. dass Kreisflächen sich verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser, dass Halbkreise rechte Winkel, dass Segmente grösser als der Halbkreis spitze, kleiner als der Halbkreis stumpfe Winkel umfassen, dass ähnliche Segmente gleiche Winkel umfassen und sich verhalten wie die Quadrate ihrer Sehnen. Diese Sätze werden von Eudemos speziell als des Hippokrates eigentümliche Erfindung hingestellt. Bretschneider möchte ihm aber nur die beiden Sätze über das Verhältnis von Kreisfläche und Segment zu Durchmesser und Sehne zuweisen, denjenigen dagegen, dass ähnliche Segmente gleiche Winkel umfassen und auch die Kenntnis von der Beziehung zwischen Peripherie- und Centriwinkel ihm abstreiten. Er schliesst dies besonders in Beziehung auf den letzten Satz daraus, dass derselbe in der ganzen Auseinandersetzung des Hippokrates nicht angewendet wird und gerade da nicht, wo er sehr zur Vereinfachung des Beweises beigetragen hätte. Allein dieser Grund scheint Suter nicht genügend. Denn an und für sich schon setzt der Beweis dieses Satzes nur die primitivsten Kenntnisse der Planimetrie über das gleichschenklige Dreieck und die Aussenwinkel eines Dreiecks voraus, so dass dessen Erfindung nicht leicht später gesetzt werden kann als die Aehnlichkeitssätze, die ja Hippokrates schon auf Kreis und Kreissegment ausgedehnt hatte. Dass derselbe in den betreffenden Beweisführungen des griechischen Mathematikers nicht angewendet wird, könnte seinen Grund in der enormen Weitschweifigkeit haben, welche jener in seine Entwickelung gelegt hat und die selten nahe liegende Hilfssätze zur Anwendung kommen lässt, sondern durch die ganze Entwickelung hindurch mit den elementarsten Theoremen operiert.

[1]) Suter. — [2]) Nach Bretschneider.

Diese Erscheinung erklärt sich[1]) einmal aus dem durchgängigen Bestreben der griechischen Mathematiker nach vollkommener Präzision und Klarheit in den mathematischen Beweisführungen und aus dem Mangel eines organisch geordneten Lehrbuches der Elemente zu jener Zeit. Vereinzelt und unzusammenhängend folgten sich Erfindung auf Erfindung, ohne geordnet und niedergeschrieben zu werden; so lagen die Sätze wohl im Kopfe des geübten Mathematikers, dem weniger Eingeweihten aber waren sie nicht so geläufig, und um solchen die mathematischen Beweise augenscheinlicher und verständlicher zu machen, war es notwendig, zu den mehr elementaren, bekannteren Sätzen seine Zuflucht zu nehmen, woraus eine grosse Weitläufigkeit resultierte.

Ungefähr um dieselbe Zeit behandelte der Sophist Antiphon das Problem der Kreisquadratur in ganz gründlicher Weise. Er versuchte dasselbe mit Hilfe der eingeschriebenen regelmässigen Vielecke zu lösen, indem er von der Ansicht ausging, wenn man die Seitenzahl fortwährend verdopple, so werde man zuletzt auf ein Vieleck kommen, dessen Seiten mit den zugehörigen Kreisbögen zusammenfallen würden. Allein schon Aristoteles und Andere machten auf den Fehler aufmerksam, den Antiphon hierbei begangen, indem er durch Annahme eines letzten Vielecks die vorausgesetzte Teilung ins Unendliche aufgehoben habe. Simplikios bemerkt dazu: „Besser ist es zu sagen, es sei ein Grundsatz, dass eine Gerade mit einer krummen Linie unmöglich teilweise zusammenfallen könne. Denn es trifft eine ausserhalb liegende Gerade den Kreis nur in einem, eine innerhalb liegende ihn nur in 2 und nicht in mehr Punkten. Das Zusammentreffen geschieht also bloss in Punkten. Inzwischen wird man, indem man die Fläche zwischen Sehne und Bogen fortwährend teilt, dieselbe keineswegs erschöpfen, noch wird man je zu dem Bogen gelangen, selbst wenn man die Teilung der Fläche bis ins Unendliche treibt. Denn wäre dies möglich, so würde man den geometrischen Grundsatz aufheben, dass die Grössen ins Unendliche teilbar sind.“ Doch gehört dem Antiphon das Verdienst, zuerst den wahren Weg betreten zu haben, da sein Gedanke notwendig auf die Schlussfolgerung hinführt, dass der Kreis einem Dreieck gleich sein muss, welches den Kreisumfang zur Grundlinie und den Kreishalbmesser zur Höhe hat, wodurch die Quadratur des Kreises auf dessen Rektifikation (d. h. das Gerademachen oder die Längenbestimmung desselben) zurückgeführt wird. Erst dem grossen Archimedes war es vergönnt, das richtige Endziel des eingeschlagenen Weges zu entdecken.

Etwa um dieselbe Zeit wie Antiphon bemühte sich, wie Johannes Philoponos berichtet, der Sophist Bryson aus Herakläa um die Lösung des nämlichen Problems und ging in seinem Versuche, die Quadratur des Kreises zu finden, einen Schritt weiter als Antiphon, indem er sich nicht damit begnügte, ein Kleineres als den Kreis zu finden, welches sich nur wenig von ihm unterschied, er verschaffte sich auch ein derselben Forderung entsprechendes Grösseres. Er zeichnete neben den einbeschriebenen Vielecken auch umschriebene Vielecke von immer grösserer Seitenzahl und glaubte durch gehörige Fortsetzung der Verdoppelung der Seitenzahl des ein- und umbeschriebenen Vielecks zuletzt auf zwei solche zu gelangen, zwischen denen der Kreis das arithmetische Mittel sei.

Einer der berühmtesten Philosophen Griechenlands, Demokritos von Abdera (über dessen Lebenszeit die Angaben auseinandergehen, welcher aber etwa von 460 bis 370 gelebt haben dürfte), welcher fünf Jahre in Aegypten verweilte und in Erinnerung dieses seines ägyptischen Aufenthalts stolz behauptete: „Im Konstruieren von Linien nach Massgabe der aus den Voraussetzungen zu ziehenden Schlüsse hat mich Keiner je übertroffen, selbst nicht die

[1]) Nach Suter.

sogenannten Harpedonagten (Seilspanner oder Feldmesser).“ Der Aegypter wird auch von Cicero als ein gelehrter und in der Geometrie vollkommener Mann gerühmt. Demokrit schrieb über die Berührung der Kreise und Kugeln, über die Irrationallinien und über die regelmässigen Körper. Auch scheint er, nach einer Stelle bei Plutarch, den Kegel durch Ebenen geschnitten zu haben; nur ist nirgends etwas Genaues über die Art und den Zweck der Schnittführung gesagt.

Rückblick: „Die Mathematiker jener Zeiten waren infolge ihrer philosophischen Ansichten zu weit auseinandergerissen, als dass es damals schon möglich gewesen wäre, das gesamte Gebiet der Wissenschaft von einem Gesichtspunkte aus und nach der nämlichen Methode zu behandeln. Erst als die philosophischen Schulen sich mehr näherten, als Platon und Aristoteles das vielseitig zerstreute Material sammelten und zu einem geordneten Ganzen zusammenstellten, erst da war es möglich, jeder Wissenschaft einen einheitlichen Plan zu Grunde zu legen. Daher denn auch aus dieser Zeit kein organisch geordnetes Lehrbuch des mathematischen Wissens auf uns gekommen ist. Hippokrates soll das erste verfasst haben, das aber leider verloren gegangen ist. Dieser Umstand erschwert in hohem Masse den Gesamtüberblick über die mathematischen Leistungen von Thales bis Platon; was wir aus den wenigen, zum Teil noch zweifelhaften historischen Angaben griechischer Schriftsteller wissen, lässt uns bloss einen Schluss ziehen auf den Höhepunkt der Wissenschaft am Ende der fraglichen Periode; das System aber, das dabei befolgt wurde, und die Form der Darstellung bleibt uns verschlossen. Wenn wir auch im Allgemeinen darüber ohne Zweifel sind, dass die ältesten Mathematiker bei ihren Beweisen und Problemen sich der synthetischen Methode bedient haben, so müssen wir immerhin annehmen, dass die Mathematiker selbst des Wesens derselben sich keineswegs recht klar bewusst waren und dieses erst dann ausgeprägter hervortrat, als Platon und seine Schüler im Gegensatz zur alten Methode die analytische in Aufnahme brachten und der jungen Disziplin die ihr noch fehlende systematische Grundlage zu geben suchten.“ — „Dass wir die Planimetrie zur Zeit des Hippokrates zu einem nahezu vollständigen Abschluss gelangt annehmen dürfen, ergibt sich mit ziemlicher Gewissheit aus dem Exzerpt des Simplikios, aus des Eudemos Geschichte der Geometrie. Was die Stereometrie anbetrifft, so sind ihre Fortschritte nur sehr gering und dürfen wir dieselbe nicht weit über die Bekanntschaft mit den 5 regulären Körpern hinausgehen lassen, was wir grösstenteils den Aegyptern schon zuschreiben müssen.“

## c. Die platonische Schule.

„Die grossartigen Fortschritte der Mathematik unter Platon und seinen Nachfolgern sind in dem Wesen der platonischen Philosophie begründet. Solange das Studium der Mathematik darauf ausging, zur reinen Erkenntnis der höchsten Prinzipien der Wissenschaft zu führen, solange war sie dem grossen Philosophen lieb und wert und die Grundlage jedes anderen Wissens; sowie sie aber mit dem Sinnlichen sich verband, wie sie den Zielen und Bestrebungen des praktischen Lebens dienen sollte, verabscheute er sie. Daher sehen wir auch unter den ersten Platonikern bei derselben Höhe der reinen Mathematik die angewandten Wissenschaften vernachlässigt. Platon machte die Mathematik zur Grundlage des philosophischen Unterrichts und schloss diejenigen von seinen Vorlesungen aus, die nichts von Geometrie verstanden, indem er voraussetzen musste, dass ein solcher weder die geistige Kraft noch diejenigen Hilfsmittel mitbringe, welche nötig waren, seine Lehren zu verstehen. Daher die berühmte Ueberschrift über dem Eingang der Akademie: „Kein der Geometrie Unkundiger trete in mein

Haus." So schickte auch Platons Nachfolger Xenokrates einen Besucher seiner Vorlesungen, der keine Vorbildung in Arithmetik und Geometrie hatte, mit den Worten fort: „Geh fort, denn du hast nicht das Zeug zur Philosophie!" Von Platon an datiert also der Ruhm, den die reine Mathematik als Bildnerin des Verstandes und der Urteilskraft zu allen Zeiten genossen hat." [1])

Platon, 427 v. Chr. zu Athen geboren, erhielt eine vorzügliche Erziehung. Seine künstlerisch angelegte Natur wurde durch Gymnastik und Musik zur vollen Harmonie aller Kräfte ausgebildet. Ferner genoss er gründlichen Unterricht in Mathematik und Naturphilosophie. Im Alter von 20 Jahren zu den philosophischen Gesprächen des Sokrates zugelassen, wurde er sogleich mit solcher Begeisterung für die Philosophie erfüllt, dass er 8 Jahre lang in unablässigem Umgang mit Sokrates und dessen Schülern lebte. Nach der Hinrichtung seines grossen Lehrers (399) verliess er Athen voll Erbitterung gegen die Pöbelherrschaft, welcher Sokrates zum Opfer gefallen war, und blieb vom 28. bis 40. Lebensjahre fast beständig auf Reisen. Zunächst verweilte er längere Zeit bei dem Sokratiker Euklides in Megara, suchte dann in Kyrene den Mathematiker Theodoros auf, vervollständigte seine mathematischen und astronomischen Kenntnisse durch einen mehrjährigen Verkehr mit den ägyptischen Priestern und reiste zuletzt nach Unteritalien, um die dort noch vereinzelt lebenden Pythagoräer, besonders Archytas von Tarent und Timäos von Lokri kennen zu lernen. Endlich kehrte er nach Athen zurück und begann hier vor einem Kreis begeisterter Anhänger nach dem Vorbilde des Sokrates zu wirken. Er lehrte 40 Jahre lang mit ausserordentlichem Erfolg und starb 347, achtzig Jahre alt, der Tradition nach an seinem Geburtstage.

„Die Zeit von Platon bis auf Euklides bietet so viel des Interessanten in der Entwickelung der Mathematik, dass es bedauerlich ist, auch für diese Periode nicht viel mehr Belege zu haben, als für die vorhergehende. Proklos führt nur einige der bedeutendsten Mathematiker der platonischen Schule kurz an und auch aus des Eudemos Geschichte sind nur wenige unbedeutende Auszüge aufbewahrt worden. Wir besitzen daher nur ziemlich unvollständige Aufschlüsse über die drei grössten Verdienste der platonischen Mathematiker, die Einführung der analytischen Methode, die Erfindung der Kegelschnitte und die Lösung der drei berühmten alten Probleme, Quadratur des Kreises, Verdoppelung des Würfels und Trisektion des Winkels, welche Fortschritte das gesamte geometrische Wissen des Altertums erschöpften. Obgleich von Platon keine geometrische Schrift auf die Nachwelt gekommen ist, so wissen wir doch von andern Schriftstellern des Altertums, dass er der Geometrie unter allen menschlichen Kenntnissen die erste Stelle einräumte und dass sie den vornehmsten Gegenstand des Lehrunterrichts ausmachte, den er seinen Schülern gab. Ja er nannte Gott selbst einen geometriesierenden Gott, gleichsam den besten Geometer. Theodoros von Kyrene war Platons Lehrer in der Geometrie, und aus dem grossen Lobe, welches Platon ihm beilegt, darf man wohl schliessen, dass der Lehrer manchen Anteil an den grossen Entdeckungen hatte, die der Schüler teils vorbereitete, teils ausführte. Proklos schreibt über Platon: „Platon verschaffte sowohl den andern Wissenschaften als auch der Geometrie einen sehr bedeutenden Zuwachs durch den grossen Fleiss, den er bekanntlich auf sie verwendete. Seine Schriften füllte er stark mit mathematischen Betrachtungen und hob überall hervor, was von der Geometrie sich in bemerkenswerter Weise an die Philosophie anschliesst."

Die Vorliebe Platons für mathematische Dinge äussert sich auch darin, dass er in vielen seiner in Gesprächsform geschriebenen Abhandlungen mathe-

[1]) Suter.

matische Beispiele zur Verdeutlichung philosophischer Gedanken benutzt, wie das nachfolgende Kapitel aus Platons „Menon" beweisen mag, in welchem Sokrates als leitende Persönlichkeit auftritt, welche (wie man dem Text gemäss annehmen muss) im Verlauf des Gesprächs zwei Figuren, nämlich die nebenstehende Figur 19 und einen einfachen Kreis in den Sand zeichnet. Die betreffende Stelle bietet zugleich ein Beispiel der sogenannten sokratischen Lehrmethode und lautet wie folgt:

Figur 19.

A B K C D E F M N O G H L J

„Menon. Nun, o Sokrates, wie verstehst du das, dass wir nicht lernen, sondern dass das, was wir Lernen heissen, Wiedererinnerung ist? Kannst du mich belehren, dass es sich so verhält? Sokrates. Soeben habe ich gesagt, o Menon, dass du ein Schalk bist, und nun fragst du mich, ob ich dich belehren könne, ich, der ich sage, dass es kein (Lehren und) Lernen gebe, sondern nur Wiedererinnerung; da soll sich wohl sogleich zeigen, dass ich mir selber widerspreche? M. Nein, beim Zeus, Sokrates, nicht in dieser Absicht sagte ich es, sondern aus blosser Gewohnheit. Aber wenn du mir es auf irgend eine Weise zeigen kannst, dass es sich so verhält, so zeige es. S. Allerdings ist das nicht leicht, dennoch will ich deinetwegen mir Mühe geben; aber rufe mir von deinen vielen Begleitern einen her, welchen du willst, damit ich an ihm es dir zeige. M. Ganz gern (ruft einem Sklaven zu:) Komm hierher! S. Ist er ein Grieche und spricht er griechisch? M. Ganz wohl, er ist im Hause geboren. S. Merke nun auf, wie er dir erscheint, ob als einer, der sich erinnert, oder als einer, der von mir lernt? M. Schon gut, ich werde acht geben. S. Sage mir doch, Knabe, weisst du, dass solch eine Figur (er zeigt ein Quadrat) ein Quadrat ist? Knabe. Ich weiss es. S. Es hat also ein Quadrat alle diese Seiten, es sind deren vier, gleich? K. Ganz recht. S. Hat es auch nicht die Linien gleich, welche durch die Mitte gehen? K. Ja. S. Könnte nicht auch eine solche Figur sowohl grösser als kleiner sein? K. Allerdings. S. Wenn nun diese Seite ($AB$) zwei Fuss und diese hier ($AD$) auch zwei Fuss wäre, wie viel Fuss würde das Ganze sein? Ueberlege es dir so: wenn diese Seite ($AB$) zwei Fuss wäre, jene aber ($AD$) nur einen Fuss lang wäre, würde da nicht die ganze Fläche einmal zwei Fuss sein? K. Ja. S. Da sie aber auch hier ($AD$) zwei Fuss hat, wird sie da nicht zweimal zwei Fuss enthalten? K. So wird es sein. S. Wieviel sind aber zweimal zwei Fuss? Rechne es aus und sage es. K. Vier, o Sokrates. S. Könnte es nun nicht eine andere doppelt so grosse Fläche als diese geben, aber eine solche, welche wie diese alle vier Seiten gleich hätte? K. Ja. S. Wieviel Fuss würde diese enthalten? K. Acht. S. Wohlan nun, versuche mir zu sagen, wie gross jede Seite einer solchen Fläche sein wird? Die Seite nämlich von diesem Quadrat hat zwei Fuss ($AD$) und ($AB$), wieviele aber hat die des doppelt so grossen? K. Offenbar ist sie doppelt so gross, o Sokrates. S. Siehst du, Menon, dass ich ihn nichts lehre, sondern ihm alles abfrage? Und nun glaubt er auch zu wissen, wie gross die Seite des achtfüssigen Quadrats ist, oder scheint es dir nicht so? Menon. Es scheint mir so. S. Weiss er es nun auch wirklich? M. Keineswegs. S. Er meint nämlich, aus der doppelt so grossen Seite entstehe das doppelt so grosse Quadrat. M. Ja. S. Siehe nur zu, wie er sich weiter erinnern wird, so wie es sich gehört. Du aber, sage mir nun, du sagst, aus der doppelten Seite entstehe die doppelte Fläche? Ich meine aber eine solche, die nicht etwa an dieser Seite lang, an jener kurz ist, sondern sie soll wie diese nach allen Seiten gleich sein,

aber doppelt so gross als diese, also acht Fuss gross. Aber sieh, ob sie dir noch aus der doppelten Seite zu entstehen scheint. K. Es scheint mir so. S. Entsteht nicht die doppelt so grosse Seite als diese ($AB$), wenn wir noch eine andere ebensogrosse als diese ($BC$) ansetzen? K. Allerdings. S. Aus dieser nun, sagst du, entstehe die achtfüssige Fläche, wenn man vier solcher Seiten nimmt? K. Ja. S. So wollen wir nun von dieser ($AC$) vier gleiche beschreiben ($AC$, $CJ$, $JG$, $AG$). Dies andere, meinst du nun doch, sei das achtfüssige Quadrat? K. Allerdings. S. Sind nun aber darin nicht vier, von denen jedes diesem vierfüssigen ($ABDE$) gleich ist? K. Ja. S. Wie gross ist es also? Ist es nicht viermal so gross, als dieses? K. Wirklich. S. Ist also das viermal so grosse das Doppelte? K. Nein, beim Zeus! S. Sondern das Wievielfache? K. Das Vierfache. S. Von der doppelten Seite also, mein Sohn, entsteht nicht das doppelte, sondern das vierfache Quadrat. K. Du hast recht. S. Denn das Vierfache von vier ist sechzehn. Nicht wahr? K. Ja. S. Von welcher Linie aber das Achtfüssige? Entstand nicht von dieser Seite ($AC$) das Vierfache? K. Ja. S. Das Vierfüssige aber entstand aus der Hälfte ($AB$) von dieser ($AC$)? K. Ja. S. Nun gut. Ist nicht das Achtfüssige das Doppelte von diesem ($ABED$) und von diesem ($ACJG$) die Hälfte? K. Jawohl. S. Wird es also nicht entstehen aus einer Linie, die grösser ist als diese ($AB$), aus einer aber, die kleiner ist als diese ($AC$)? Nicht wahr? K. Es scheint mir so. S. Schön! Was dir scheint, das antworte mir. Nun sage mir: war nicht diese ($AB$) zwei Fuss, diese aber ($AC$) vier Fuss? K. Ja. S. Es muss aber nun die Seite des achtfüssigen Quadrats zwar grösser sein als diese Seite von zwei Fuss, aber auch kleiner als diese von vier Fuss. K. Das muss sein. S. Versuche nun zu sagen, wie gross sie sein wird nach deiner Meinung. K. Drei Fuss. S. Nun, wenn sie drei Fuss lang sein soll, so wollen wir zu dieser ($AB$) nur die Hälfte ($BK$) von dieser ($BC$) hinzunehmen, wird sie da nicht drei Fuss haben? Dies hier sind nämlich zwei Fuss, dies einer, und auf der andern Seite dies ebenso zwei Fuss ($AD$), dies aber einer ($DM$). Dies ist also die Fläche, welche du meinst ($AMNK$). K. Ja. S. Wenn sie nun hier drei und da drei Fuss hat, wird da nicht die ganze Fläche dreimal drei Fuss haben? K. Es scheint so. S. Aber wieviel sind dreimal drei Fuss? K. Neun. S. Wieviel Fuss sollte aber das Doppelte haben? K. Acht. S. Es kann also von der Linie von drei Fuss die achtfüssige Fläche nicht werden? K. Freilich nicht. S. Aber von welcher? Versuche es genau zu sagen, und wenn du nicht rechnen willst, so zeige doch, von welcher Linie es entsteht. K. Aber wahrhaftig, Sokrates, ich weiss es nicht. S. Merkst du wieder, Menon, wie er schon im Erinnern vorschreitet? Zuerst wusste er auch nicht, wie gross die Seite des achtfüssigen Quadrats sei, wie er es auch jetzt noch nicht weiss, aber er meinte doch damals, es zu wissen, und antwortete dreist, als ob er es wisse, und glaubte gar nicht zweifelhaft zu sein; jetzt aber ist er schon zweifelhaft, und wie er es nicht weiss, so meint er auch nicht, es zu wissen. Menon. Du hast recht. S. Steht es nun nicht besser mit der Sache, welche er nicht wusste? M. Auch dies scheint mir so. S. Indem wir ihn nun so in Verlegenheit und in einen Starrkrampf versetzten, wie der Zitterrochen, haben wir ihm damit etwas geschadet? M. Es scheint mir nicht so.

S. Ganz leicht haben wir es ihm gemacht, wie es scheint, zu erforschen, wie es sich verhält; denn gern wird er jetzt nachforschen, da er nicht weiss, damals aber glaubte er leichthin vor allen Leuten und oft richtig sagen zu können, dass das doppelt so grosse Quadrat eine doppelt so grosse Seite haben müsse. M. Natürlich. S. Glaubst du aber, dass er früher Hand angelegt haben würde, das, was er zu wissen glaubte und doch nicht wusste, zu untersuchen oder zu lernen, ehe er in den Zweifel geriet, erkannte, dass er nichts wisse,

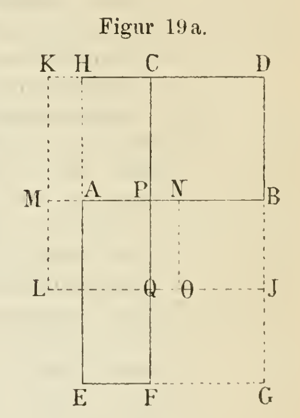
und Verlangen bekam, es zu wissen? M. Es scheint mir nicht so, Sokrates. S. Hat er nicht also von dem Starrkrampf Vorteil gehabt? M. So scheint es mir. S. Nun siehe aber zu, wie er von diesem Zweifel aus mit mir forschend die Wahrheit finden wird, indem ich ihn bloss frage, aber keineswegs lehre. Gib aber acht, ob du etwa findest, das ich ihn lehre oder ihm die Sache erkläre und ihm nicht bloss seine Meinung abfrage. Sage du mir nun, ist dies nicht unser vierfüssiges Viereck (*ABED*)? Verstehst du? Knabe. Ich verstehe. Ja. S. Können wir zu diesem nicht ein zweites ihm gleiches hinzusetzen (*BCFE*)? K. Ja. S. Und auch noch ein drittes (*DEHG*), das jedem der beiden gleich ist? K. Ja. S. Können wir nicht auch noch das hier in der Ecke ausfüllen (*EFJH*)? K. Allerdings. S. Entstehen da nicht vier gleiche Vierecke? K. Ja. S. Wie nun? Das Wievielfache ist doch dies Ganze (*ACJG*) von diesem da (*ABED*)? K. Das Vierfache. S. Wir mussten aber das Doppelte haben, oder erinnerst du dich nicht? K. Allerdings. S. Schneidet nun nicht diese Linie, die von einer Ecke zur andern Ecke gezogen wird, jedes von diesen Vierecken in zwei gleiche Teile? K. Ja. S. Haben wir hier nicht vier gleiche Linien (*DB*, *BF*, *FH*, *HD*), die hier das Viereck (*DBFH*) einschliessen? K. Ja. S. Siehe nun zu, wie gross ist wohl dies Viereck? K. Ich kann das nicht. S. Hat nicht von diesen vier Linien jede von jedem Viereck die Hälfte nach innen abgeschnitten? oder ists nicht so? K. Ja. S. Wieviele solcher Vierecke (*ABED*) sind nun in diesem Viereck (*ACJG*)? K. Vier. S. Wieviel aber in dem da (*DBFH*)? K. Zwei. S. Was ist aber vier im Vergleich zu zwei? K. Das Doppelte. S. Wieviel Fuss hat also das Viereck (*DBFH*)? K. Acht Fuss. S. Von welcher Linie (entsteht es)? K. (Auf eine Diagonale zeigend) Von dieser. S. Von der, welche von einer Ecke zur andern im vierfüssigen Quadrat reicht? K. Ja. S. Die Sophisten nennen aber diese Linie Durchmesser. Wenn wir aber diese Linie Durchmesser (Diagonale) nennen, so entsteht aus dem Durchmesser, wie du meinst, das doppelte Viereck. K. Allerdings, o Sokrates, u. s. w.

Es ist dies der Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes für den Fall, dass die beiden Katheten gleich gross sind. An einer spätern Stelle kehrt Sokrates wieder zur Geometrie zurück, um ihr ein passendes anschauliches Beispiel für die eben zwischen ihm und Menon erörterte Frage, ob Tugend lehrbar sei oder nicht, zu entnehmen. Er will erörtern, dass das Thunliche im Allgemeinen sich selten behaupten lasse, dass es Fälle der Möglichkeit wie der Unmöglichkeit gebe. Er will ein recht zutreffendes Beispiel dafür wählen, und da bleibt sein ringsum suchendes Auge an den im Sande noch erkennbaren Figuren haften. Ist es, fragte er, möglich dieses Quadrat *(ABED)* als gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck *(BFD)* in diesen Kreis auf dem Durchmesser als Grundlinie genau einzuzeichnen? Sokrates gibt die Antwort ja und nein! Es wird möglich sein, das Verlangte zu thun, wenn die Seite des Quadrats dem Kreishalbmesser gleich ist, oder was dasselbe heisst, wenn sie auf dem Durchmesser aufgetragen, ein ihr gleiches Stück übrig lässt, sonst nicht. — Sokrates leitet die letzte Auseinandersetzung durch die Worte ein: „Unter der Untersuchung von einer Voraussetzung aus verstehe ich das Verfahren, welches die Geometer oft im Auge haben; wenn sie Jemand fragt, z. B. über eine Fläche, ob in diesen Kreis die Fläche als Dreieck eingezeichnet werden könne“ etc. Es war mithin damals schon oft von Geometern geschehen, was Hippokrates von Chios noch unterlies. Es war die Frage aufgeworfen worden, ob eine Konstruktion möglich sei oder nicht.

Ausser einigen kleineren geometrischen Leistungen des Platon wird Letzterem hauptsächlich die Erfindung, d. h. die erste ausgedehnte und systematische Anwendung jener erfolgreichen analytischen Methode zugeschrieben, die wohl

den grössten Teil zu der bald darauf erfolgten Entdeckung der Kegelschnitte beigetragen haben mag. „Dieser berühmten Kurven, welche 2000 Jahre später eine so bedeutende Rolle in der Mechanik des Himmels spielten, nachdem Kepler sie für die wahren Bahnen erkannt hatte, welche von den Planeten und ihren Trabanten durchlaufen werden, und nachdem Newton in ihren Brennpunkten diejenigen Punkte entdeckt hatte, in welchen die Kräfte sich befinden, die alle Körper des Weltsystems bewegen.“ Diog. Lärtius und Proklos berichten, dass Platon diese Methode der Untersuchung für seinen Schüler Leodamas von Thasos eingeführt habe, der dadurch auf mehrere wichtige geometrische Sätze geführt worden sein soll. Wie Platon bei dieser neuen Beweisart eigentlich verfahren ist, lässt sich nicht mit Bestimmtheit sagen, da von ihm und selbst von seinen vielen Schülern keine zusammenhängenden geometrischen Schriften auf uns gekommen sind. Aus den Worten des Proklos und aus einigen Sätzen des Pappos aber ist ersichtlich, dass dieses neue platonische Beweisverfahren im gleichen Gegensatz zu dem synthetischen der älteren Geometer und des Euklid stand, den wir heutzutage noch zwischen der analytischen und synthetischen Methode festsetzen. Wie man in der letzteren von schon bekannten Grund- und Lehrsätzen ausgeht, um durch eine gehörige organische Anwendung derselben endlich zum Beweise des vorgelegten Satzes zu gelangen, so nimmt die analytische Methode das Gesuchte als gegeben an, zergliedert dasselbe und untersucht seine Bedingungen, bis sie zu Bekanntem gelangt, von dem aus nun die Synthesis den umgekehrten Weg gehen kann. Wird z. B. gefordert, eine gegebene Linie $AB$ so zu teilen, dass das Rechteck aus der Linie und einem Teil derselben gleich dem Quadrat über dem andern Teil ist (Euklids Elemente II, 11), so nimmt man an, dass die Gerade $AB$ in $P$ auf die verlangte Weise geteilt sei, konstruiert über $PB$ das Quadrat $PD$ und über $AP$ das Rechteck $PE$, wo $PF = AB$ ist; dann ist $PE = PD$. Man verlängert die betreffenden Linien bis $H$ und $G$, halbiert $BG$ in $J$, errichtet über $DJ$ das Quadrat $DL$, über $BJ$ das Quadrat $BO$, verlängert $BA$ bis $M$; so ist

Figur 19a.

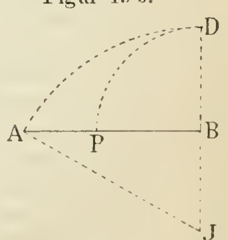



$MC = FJ$, weil $MP = GJ$, $PC = JQ$;
$LP = OB$, weil $LQ = QP = OJ = JB$;
$QD = QD$; beide Seiten dieser 3 Gleichungen addiert

$$\underbrace{MC + LP + QD}_{DL} = FJ + OB + QD \text{ oder}$$
$$DL = FD + OB \text{ u. weil } PD = EP, \text{ auch}$$
$$DL = FB + EP + OB = EB + OB;$$
$$\text{also } DJ^2 = AB^2 + BJ^2;$$

$BJ$ aber ist $\frac{1}{2} BG = \frac{1}{2} BA$; damit ist die Konstruktion ausführbar. Um zu untersuchen, ob dieselbe auch richtig ist, errichtet man im Endpunkte $B$ (Figur 19b)

Figur 19b.




der Geraden $AB$ eine Senkrechte $BJ = \frac{1}{2} AB$; ziehe $JA$, verlängere $JB$, bis $JD = JA$ ist, mache $BP = BD$, so ist $AB$ in $P$ so geteilt, dass $AP \cdot AB = PB^2$ ist. Man ziehe nach Bedarf die Hilfslinien der Figur 19a, so soll $EP = PD$ sein; dann müsste auch $EP + FB$, d. i. $EB = PD + FB$, d. i. $FD$, $EB + OB = FD + LP$ (weil $OB = LP$) $= QD + LP + MC$ (weil $FJ = MC$) $= LD$; oder

$AB^2 + BJ^2 = DJ^2 = AJ^2$ (weil $DJ = AJ$) sein, und das ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz richtig. Hiermit ist das analytische Verfahren zu Ende. Konstruktion und Beweis gehört nicht mehr zur Analysis, sondern zur Synthesis, die jedesmal auf die Analysis folgen muss. Der Beweis wird lauten:

Es ist $AB^2 + BJ^2 = AJ^2$ (pythagoräischer Lehrsatz), also

$EB + OB = LD$ (denn $AJ = DJ$, $AJ^2 = DJ^2$); ferner

$EB = LD - LP$ (denn $OB = LP$);

$\underbrace{EB - QB - FJ}_{EP} = \underbrace{LD - LP - QB - MC}_{PD}$ (denn $MC = FJ$): oder

$AP \cdot AB = PB^2$

was zu beweisen war. — Es ist klar, dass die Analysis nur zum Auffinden des Weges führt, welchen die Synthesis in umgekehrter Weise wie jene einschlagen muss. Die Analysis ist sonach anscheinend ein indirektes Verfahren, in Wahrheit aber ein direktes, denn es führt ja zu diesem, zur Synthesis, zu welcher man sonst nur durch sinnliche Vorstellung, indem man die Analysis mehr oder weniger unbewusst im Kopfe anwendet, oder durch Probieren gelangt.

Die Alten kannten noch eine andere Beweisart, wahrscheinlich die älteste und unvollkommenste von allen, die apagogische oder die Reductio ad absurdum genannt, welche darin besteht, dass man zeigt, wie man bei einer gemachten Annahme auf etwas Absurdes oder Widersinniges stösst, daher die andere Voraussetzung als die richtige betrachten muss. Wir finden diese Methode sowohl bei den Geometern vor als auch nach Platon öfters angewandt.

Mit der Entdeckung dieser neuen analytischen Beweismethode steht wohl im nächsten Zusammenhang das Bestreben Platons um eine wissenschaftlich genauere Definition der geometrischen Grundbegriffe des Punktes, der Linie, Fläche, Geraden, Ebene, des Winkels etc., um einen logischeren und systematischeren Aufbau der gesamten Mathematik. Von derartigen Definitionen, die Platon selbst aufgestellt, ist nur eine bekannt, nämlich die der Geraden; dieselbe lautet nach Proklos: „Platon definiert die gerade Linie als diejenige, in welcher die Endpunkte den zwischenliegenden Teil verdecken." — Bis hierher lassen sich bedeutende Lücken wahrnehmen in der strengen Formulierung der Begriffe, in der methodischen Anordnung der Lehrsätze und Aufgaben; erst von Platon an beginnt das streng logische Denken seinen wohlthätigen Einfluss auszuüben auf eine folgerichtige Entwickelung der Wissenschaft, die dann in Euklid ihren vollendeten Höhepunkt erreichte.

Man verdankt Platon ebenfalls die Anregung zur weiteren Ausbildung der Stereometrie, die zu seiner Zeit noch bedeutend hinter den andern Teilen der Mathematik zurückstand, denn er schrieb darüber selbst: „Mit der Stereometrie steht es noch lächerlich; sowohl weil kein Staat den rechten Wert darauf legt, wird hierin nur wenig erforscht bei der Schwierigkeit der Sache, als auch bedürfen die Forschenden eines Anführers, ohne den sie nicht leicht etwas entdecken werden, und der wird sich nicht so leicht finden; und fände er sich, so würden ihm, wie die Sache jetzt steht, die, welche in diesen Dingen forschen, nicht gehorchen, weil sie sich selbst zu viel dünken." Besonders waren die Sätze über Cylinder, Pyramide und Kegel noch sehr wenig ausgebildet; die regulären Körper und die Kugel waren von den Pythagoräern einigermassen berücksichtigt worden, wenn auch sehr wenig in geometrischer Beziehung.

Platon lässt in dem „Timäus" überschriebenen Dialog den Timäus von Lokri, einen eifrigen Pythagoräer, auffordern, Auseinandersetzungen zum Besten zu geben, über die Entstehung der Welt etc. Timäus erfüllt diesen Wunsch und kommt dann auch zu den vier Elementen Feuer, Wasser, Luft und Erde, deren

Gestalten er auseinandersetzt; letztere beweisen uns, dass die Schule des Pythagoras sich mit den fünf regulären Körpern beschäftigt hat, denn die Gestalt, in welcher Timäus das Feuer auftreten lässt, ist das Tetraeder, die Luft besteht aus Oktaedern, das Wasser aus Ikosaedern, die Erde aus Würfeln, und da noch eine fünfte Zusammensetzung möglich war, so benutzte Gott diese, also das Pentagondodekaeder zum Umriss des Weltganzen. Andere regelmässige Körper als diese fünf gibt es aber in der That nicht, und dass Timäus (d. h. Platon) von dieser Unmöglichkeit überzeugt ist, das beweist, dass auch die Lehre von der Kugel bis zu einem ziemlich hohen Grade ausgebildet gewesen sein muss, in welche ja die regelmässigen Körper beschrieben gedacht werden können. Es dürfte sogar wahrscheinlich sein, dass die Sphärik, die Lehre von der Kugel, vorausging, welche selbst von den ägyptischen astronomischen Methoden untrennbar ist, und dass erst aus der Sphärik jener eben besprochene Teil der Lehre von durch Ebenen begrenzten Körpern sich entwickelte.

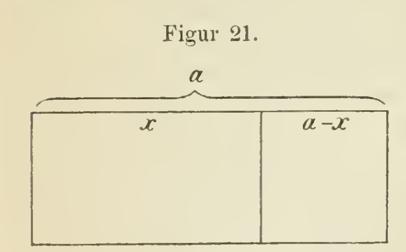
Bevor indessen Timäus die fünf regulären Körper in der angegebenen Weise physikalisch verwertet, verfolgt er sie in ihrer Entstehung, und hier treten uns wieder dieselben Sätze entgegen, von denen Proklus als pythagoräischem Eigentum uns erzählt. Die fünf Körper, bemerkt Timäus, besässen als Körper sämtlich Tiefe und seien von allen Seiten von ebenen Flächen begrenzt. Diese Flächen selbst setzten sich immer aus Dreiecken zusammen, und zwar gebe es zwei Gattungen rechtwinkliger Dreiecke, aus welchen alle hier nötigen Figuren hervorgehen. Das eine sei das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck. Daraus bildet sich das Quadrat, sei es nun, dass man zwei derselben mit der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite aneinandersetzt, sei es nun, dass man vier derselben benutzt, die man so legt, dass die vier rechten Winkel einen gemeinsamen Scheitelpunkt haben. Keine der andern Figuren hingegen geht aus dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke hervor. Zu ihrer Bildung ist vielmehr das zweite, noch näher zu beschreibende rechtwinklige Dreieck erforderlich, aus welchem umgekehrt wieder das Quadrat nicht entstanden gedacht werden kann. Dieses zweite rechtwinklige Dreieck ist dasjenige, dessen beide spitze Winkel $^1/_3$ und $^2/_3$ des rechten Winkels betragen, bei welchem also die Hypotenuse doppelt so gross ist wie die kleinste Kathete, und das Quadrat der grösseren Kathete dreimal so gross wie das der kleineren. Zwei solche Dreiecke mit der grösseren Kathete aneinandergelegt, so dass die kleineren Katheten eine gerade Linie bilden, geben das gleichseitige Dreieck. Auch aus sechs solchen Elementardreiecken lässt sich ein gleichseitiges Dreieck bilden, wenn man sie alle so zusammenfügt, dass sämtliche Winkel von der Grösse von $^2/_3 R$ in einem gemeinsamen Scheitelpunkte zusammenstossen, der alsdann der Mittelpunkt der Figur ist. Diese offenbar pythagoräische Theorie (wie schon der vielfache Gebrauch des rechtwinkligen Dreiecks beweist) ist insofern von Interesse, als wir sehen, wie die pythagoräische Schule das mathematische Experiment liebte. Es wurden die Flächenzusammensetzungen aus solchen Elementarfiguren versucht, und die Fälle, in welchen eine solche Zusammensetzung gelang, wurden besonders notiert. Die Zusammensetzung der Seitenfläche des fünften Körpers, also des Fünfecks, lehrt Platon nicht, weil es sich eben nicht aus den beiden angewandten Elementardreiecken bilden lässt. Aber dass man seine Darstellung aus Dreiecken in der pythagoräischen Schule versucht hat, wurde bereits früher erwähnt. Man kam so zum Sternfünfeck, Drudenfuss oder Pentalpha, welches als pythagoräisches Erkennungszeichen den Briefen als Ueberschrift beigegeben wurde.

In der wissenschaftlichen Mathematik der Griechen wurden die unbekannten Grössen nur durch Konstruktion anschaulich ausgedrückt. Eine der unentbehrlichsten Forderungen der griechischen Geometrie war, an eine gegebene gerade

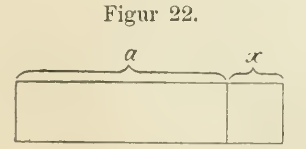
Linie ein Rechteck so anzulegen, dass der Inhalt desselben einer gegebenen Fläche $A$ gleich sei. Sollte die Figur ein Parallelogramm von gegebenem Winkel sein, so konnte man zunächst die gegebene Fläche in ein Dreieck und dieses in ein Parallelogramm von gegebenem Winkel verwandeln. Ist z. B. das Fünfeck $ABCDE$ in ein Parallelogramm mit dem gegebenen $\llcorner\, \alpha$ zu verwandeln, so erhält man zunächst Viereck $EFCD$, daraus Dreieck $FCG$ und endlich Parallelogramm $HFJK$, gleichflächig Fünfeck $ABCDE$. Ist $A$ der Inhalt der gegebenen Fläche, $a$ die gegebene Seite des gesuchten Rechtecks (in welches sich jedes Parallelogramm leicht verwandeln lässt) und $x$ die unbekannte andere Seite, so ist die Bedingung $ax = A$, die Konstruktion gibt $x$; sie ist also eine geometrische Methode zur Auffindung der Unbekannten. Ein Rechteck lässt sich aber auch leicht in ein inhaltsgleiches Quadrat verwandeln. Ist wieder $A$ die gegebene Fläche und $x$ die Seite des Quadrats, so ist $x^2 = A$. Diese zweite Konstruktion gab demnach die Auflösung einer reinen Gleichung des II. Grades. Das Anstrecken und das Quadrieren waren also die zwei wichtigsten Hilfsmittel und entsprachen unserer Auflösung der Gleichungen des I. und der reinen Gleichungen des II. Grades. Das Anstrecken wurde aber durch angefügte Bedingungen noch erweitert und führte so zur geometrischen Auflösung der gemischten Gleichungen des II. Grades. Ist z. B. eine Gerade $a$ und eine Fläche $A$ gegeben, so kann verlangt werden, die Fläche $A$ so an die Gerade $a$ als Rechteck anzustrecken, dass dieses sich nicht über die ganze Linie ausdehnt, sondern noch ein Quadrat übrig bleibt; in diesem Fall haben Rechteck und Quadrat die gleiche Höhe und die Summe der Grundlinien beider Vierecke ist $= a$. Ist nun die Basis des Rechtecks $= x$, so ist die des Quadrats $a - x$, und dies ist zugleich die Höhe; man hat daher die Bedingung $x(a - x) = A$, oder $x^2 - ax = -A$, also eine gemischte Gleichung vom II. Grade. An diese Konstruktion reiht sich noch eine weitere von gleicher Art. Eine Fläche $A$ und eine Gerade $a$ sind gegeben; man soll die Fläche an die Gerade als Rechteck so anstrecken, dass dieses die Gerade um ein Gewisses überragt. Nimmt man auch hier den Fall, dass das Ueberragende ein Quadrat ist, so ergibt sich auf dieselbe Art die Gleichung $x(a + x) = A$ oder $x^2 + ax = A$. Die Auflösung dieser Aufgaben, d. h. die Konstruktion der Unbekannten, war Platon bekannt, wie aus einer vielbesprochenen Stelle eines seiner Dialoge unzweifelhaft hervorgeht.

Figur 20.

Figur 21.



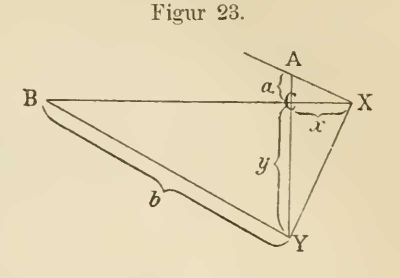

Figur 22.




Nach Hippokrates findet man die Lösung der Aufgabe, einen Würfel von der Seite $a$ im Verhältnis $a:b$ zu vergrössern, also die Länge $x$ aus der Proportion $a^3 : x^3 = a : b$, wenn man $x$ und eine neue Unbekannte $y$ so bestimmen kann, dass $a : x = x : y = y : b$ und die Auffindung zweier mittlerer Proportionalen ist von jetzt ab der Zielpunkt weiterer Arbeit. Zunächst stellte Platon folgende Betrachtung

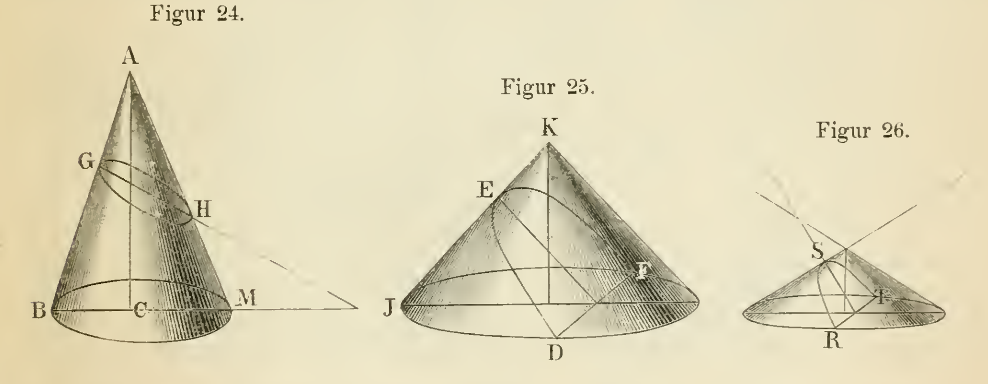
an: Trägt man die vier Strecken $a$, $x$, $y$, $b$, welche in obiger Proportion stehen, auf einem rechtwinkligen Axenkreuz um $C$ so ab, wie es in beistehender Figur angedeutet ist, so sind die Dreiecke $ACX$, $XYC$, $YCB$ ähnlich; daher ergänzen sich die Winkel bei $X$ zu einem rechten, ebenso die bei $Y$. Umgekehrt: Kann man eine Gerade $XY$ so zwischen zwei Schenkel eines Axenkreuzes legen, dass die in den Punkten $XY$ errichteten Perpendikel durch $A$ und $B$ gehen, so ist die Aufgabe gelöst. Platon löste das Problem mit Hilfe eines Instruments, bestehend aus zwei Linealen, die sich zwischen den Rinnen zweier andern, senkrecht zu den ersteren stehenden Linealen parallel zu einander verschieben liessen.[1]) Die Lösung beruht auf der zweimaligen Anwendung des Satzes, dass die von der Spitze des rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte die mittlere Proportionale ist zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

Figur 23.




Es sind nun wohl hauptsächlich die Untersuchungen über den Kegel, denen wir das grösste Verdienst der platonischen Schule, die Entdeckung der Kegelschnitte verdanken. Von den Schriftstellern des Altertums und der neueren Zeit wird diese Erfindung gemeiniglich dem Menächmos, einem Schüler Platons, zugeschrieben. Nach Proklos Angabe nannte Eratosthenes, wie auch Geminos die aus dem Schnitt eines Kegels mit einer Ebene entstehenden 3 Kurven die Menächmeischen Triaden (die Namen Parabel und Hyperbel sind jüngeren Datums als Menächmos: sie gehören dem Apollonios von Perga).

Figur 24. Figur 25. Figur 26.




Eutokios hat uns nun aus der Geometrie des Geminos einen Auszug erhalten, woraus ersichtlich ist, wie Menächmos sich diese Kurven entstanden dachte und dieselben definierte. „Was aber Geminos berichtet, ist wahr, dass nämlich die

[1]) „Der Gedanke war sehr richtig und zeugt keineswegs von geringen Kenntnissen in der Geometrie, denn wenn wir Instrumente hätten, mit welchen die Kegelschnitte ebenso richtig und leicht gezeichnet werden könnten, wie der Kreis mit dem Zirkel, so würden alle Probleme, welche zu ihrer Lösung die Konstruktion dieser Kurven verlangen, ebensogut der Elementargeometrie anheimfallen, wie die, zu welchen die Zeichnung des Kreises nötig ist. Hierin liegt auch der Grund der damals eingeführten Einteilung der Geometrie in die elementare und in die transcendente Geometrie; die erste umfasste die ebenen Figuren von geraden Linien begrenzt, sowie den Kreis, und die Körper von Ebenen umschlossen nebst Cylinder, Kegel und Kugel; unter der zweiten begriff man die Kegelschnitte, überhaupt alle anderen krummen Linien ausser dem Kreise und die übrigen krummflächigen Körper.“ (Arneth.)

Alten, indem sie den Kegel definierten als einen durch die Umdrehung eines rechtwinkligen Dreiecks (*ACB*) um die eine seiner Katheten entstandenen, natürlich auch annahmen, dass nicht nur alle Kegel gerade seien, sondern dass auch in jedem nur ein Schnitt entstehe, im rechtwinkligen die jetzt sogen. Parabel (*DEF*), im stumpfwinkligen die Hyperbel (*RST*) und im spitzwinkligen die Ellipse (*GH*).[1]) Dies ist auch der Grund, weshalb wir diese Schnitte von ihnen so benannt finden. Gleich wie nun von den Alten für jede besondere Form des Dreiecks das Theorem der zwei Rechten speziell bewiesen ward, zuerst für das gleichseitige, sodann für das gleichschenklige und endlich für das ungleichseitige, während die Späteren das allgemeine Theorem bewiesen, „die drei Innenwinkel jedes Dreiecks sind zwei Rechten gleich," so betrachteten sie auch unter den Kegelschnitten den sogen. rechtwinkligen Kegelschnitt ausschliesslich am rechtwinkligen Kegel (Fig. 25), indem sie die Schnittebene (*DEF*) auf die Seitenlinie (*JK*) des Kegels senkrecht legten; den stumpfwinkligen Kegelschnitt wiesen sie am stumpfwinkligen Kegel (Fig. 26), den spitzwinkligen Kegelschnitt am spitzwinkligen Kegel nach, wobei sie die Schnittebene an jedem Kegel gleichfalls senkrecht auf dessen Seitenlinie legten. Offenbar stammen davon die alten Namen der Kurven her. Später aber zeigte Apollonios der Pergaier ganz allgemein, dass bei jedem Kegel, sei er gerade oder schief, alle Schnitte enthalten sind, je nach der verschiedenen Lage der Schnittebene gegen den Kegel; die ihn bewundernden Zeitgenossen nannten ihn, der Merkwürdigkeit der von ihm entdeckten Eigenschaften der Kegelschnitte halber, den grossen Geometer. Also berichtet Geminos im 6. Buche seines Lehrgebäudes der Mathematik." Eutokios schliesst den Bericht über die Auflösungen des Menächmos mit den Worten: „Die Parabel zeichnet man mittelst eines von dem Mechaniker Isidorus von Milet, unserem Lehrer, erfundenen Zirkels, der von ihm in seinem Kommentar zu der Gewölbelehre des Heron beschrieben worden ist."

Wie weit Menächmos in der Erkennung der Eigenschaften der Kegelschnitte gekommen ist, ist schwer zu entscheiden. Doch erfahren wir aus dem Zeugnis des Apollonios, dass seine vier ersten Bücher der Kegelschnitte ungefähr das enthalten, was vor ihm schon bekannt gewesen war. Nähern Aufschluss aber geben die beiden ausgezeichneten Lösungen des Problems von der Verdoppelung des Würfels, die von Menächmos gefunden und durch Eutokios uns aufbewahrt worden sind. Wie wir wissen, hatte Hippokrates dieses Problem auf die Auffindung zweier mittleren Proportionallinien zu zwei gegebenen Geraden zurückgeführt; Menächmos löste nun diese Aufgabe mit Hilfe der Kegelschnitte auf zwei Arten, indem er bei der ersteren zwei Parabeln, bei der letzteren eine Parabel und eine Hyperbel anwandte. Diese Lösungen setzten schon eine ziemlich umfangreiche Kenntnis der Eigenschaften der Kegelschnitte voraus und besonders

[1]) Denkt man sich durch die Axe *AC* (Figur 24) eines Kegels eine Ebene gelegt, so wird diese senkrecht auf *BM* und der Schnitt ein gleichschenkliges Dreieck *BAM* sein. Man nennt dieses Dreieck das Axendreieck. Spitz-, recht- und stumpfwinklig hiessen die Kegel, je nachdem der Winkel an der Spitze des Axendreiecks kleiner, gleich oder grösser als $90^0$ war. Man muss sich die Kegel in der Richtung ihrer Axe unbegrenzt denken und ausserdem nach oben hin durch Verlängerung der Seiten wiederholt; hierdurch wird in Bezug auf die Ellipse nichts geändert, der Schnitt kann nicht mehr den obern Kegel erreichen, und diese Linie schliesst, wie der Kreis, einen Raum ein. Bei der Parabel erreicht der Schnitt auch nicht den obern Kegel, indem die Schnittfläche einer Seite parallel läuft; sie tritt aber auch nicht mehr aus dem untern Kegel heraus, die Zweige kehren nicht mehr zu sich zurück und laufen in das Unendliche fort. Der Hyperbelschnitt geht durch beide Kegel und läuft in beiden fort, diese Kurve besteht daher aus zwei getrennten Teilen und läuft mit vier Aesten in das Unendliche aus. Alle Kegelschnitte können an einem und demselben geraden oder schiefen Kegel, dessen Basis ein Kreis ist, erzeugt werden, und zwar entsteht eine Parabel, wenn die Schnittfläche parallel einer Seite, und eine Hyperbel, wenn sie beide Kegel trifft.

die Kenntnis derjenigen Grundeigenschaften beider Kurven, welche die analytische Geometrie durch die Gleichungen $y^2 = ax$ und $xy = c^2$ auszudrücken weiss.

Des Menächmos Bruder und ebenfalls Schüler des Platon war der Mathematiker Dinostratos, bekannt durch seine Lösung der Kreisquadratur mit Hilfe der von Hippias zum Zwecke der Sektion des Winkels gefundenen Quadratrix. Das ist eine transcendente (d. h. das Sinnliche, das Gebiet der Erfahrung übersteigende) Kurve. Wenn sich in einem Quadrat $ABCD$ die eine Seite $AB$ mit gleichförmiger Geschwindigkeit um den Punkt $A$ dreht, so dass sie in die Lage von $AD$ kommt, und wenn in derselben Zeit die Seite $BC$ sich parallel mit sich selbst mit gleichförmiger Geschwindigkeit ebenfalls in die Lage von $AD$ bewegt, so beschreibt der Schnittpunkt beider bewegten Linien eine Quadratrix. — Pappos giebt die Lösung des Dinostratos, welche darin besteht, dass in der Quadratrix sich verhält $BED : AD = AD : AG$, woraus für den Kreisquadranten $BED$ sich ergiebt $BED = \frac{AD^2}{AG}$. Es wäre also die Quadratur des Kreises möglich, wenn der Punkt $G$ der Quadratrix geometrisch genau bestimmt werden könnte. Die Aufstellung obiger Proportion beruht auf dem Schlusse, dass je mehr sich der Halbmesser $AE$ der Lage $AD$ nähert, desto mehr das Verhältnis $ED : FJ$ demjenigen von $AD : AG$ näher kommt.

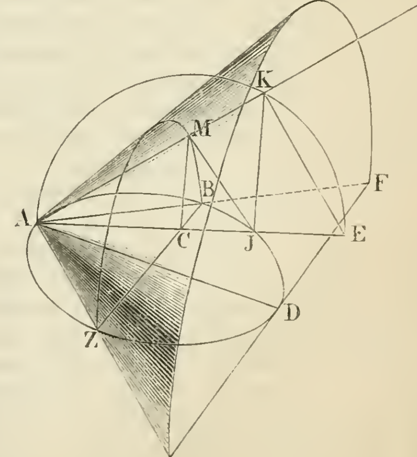
Figur 27.

Es sind hier noch einige Geometer zu nennen, die ausserhalb der Schule des Platon stehend, sich doch derselben bei ihrem Entstehen anschlossen. Es sind dies Leodamas von Thasos, Theaitetos von Athen und Archytas von Tarent. Proklos berichtet von Leodamas, dass er in Verbindung mit den beiden andern die Theoreme der Geometrie vermehrt und ihre Ableitung auf streng wissenschaftlichem Wege bewirkt habe, eine Thätigkeit, in welcher er durch die ihm mitgeteilte analytische Methode sehr bedeutend gefördert worden ist, so dass man späterhin annahm, Platon habe diese Methode speziell für ihn erfunden.

Von Theaitetos ist die Angabe erhalten, dass einige Fundamentalsätze in Euklids Elementen von ihm herrühren, welche eine strenge Darstellung der Lehre von den Verhältnissen und Proportionen erfordern und namentlich der Inkommensurabilität Rechnung tragen.

Von Archytas (geb. um 430 v. Chr., gest. um 365 v. Chr.), welcher seiner Heimat und seinem Bildungsgange nach Pythagoräer war, berichtet Diog. Lärtios, er habe zuerst die geometrischen Grundprinzipien auf die Behandlung der Mechanik angewendet, ebenso auch die Mechanik auf die Konstruktion geometrischer Figuren; er soll auf diesem Wege die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels wie

Figur 28.



folgt gelöst haben: Es seien $AD = b$ und $AB = a$ die beiden Geraden, zwischen welche zwei mittlere Proportionalen einzuschalten sind. Die grössere $AD$ wird als Durchmesser eines Halbkreises benutzt, in welchen die kleinere $AB$ als Sehne eingezeichnet wird. Aber auch senkrecht zu diesem ersten Halbkreise wird über $AD$ ein zweiter Halbkreis errichtet, der in $A$ befestigt über die Ebene $ABD$ weggeschoben werden kann. Er bildet dabei auf dem über dem Halbkreise $ABD$ errichteten Halbcylinder eine krumme Linie. Andererseits ist das Dreieck $ADF$ gegeben durch die $AD$, die $AB$ und die Tangente $DF$ an den Halbkreis in $D$. Dieses Dreieck liefert, um $AD$ als Axe in Drehung versetzt, eine Kegeloberfläche, welche gleichfalls den Halbcylinder und die vorher auf ihm erzeugte Kurve schneidet, letztere in einem Punkte $K$, der, als dem Halbcylinder angehörend, senkrecht über einem Punkte $J$ des Halbkreisbogens $ABD$ liegen muss. Während $AF$ die Kegeloberfläche beschreibt, beschreibt endlich auch das Stück $AB$ dieser Geraden eine Fläche gleicher Art, beziehungsweise der Punkt $B$ einen Halbkreis $BMZ$, der senkrecht zur Horizontalebene $ABDZ$ steht. Da zu dieser Ebene auch $AKE$ senkrecht steht, so ist zu ihr auch $MC$ senkrecht, die Durchschnittsgerade der beiden genannten Ebenen, beziehungsweise $MC$ senkrecht $BZ$ als Durchnittsgeraden der $BMZ$ mit der $ABDZ$. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Eigenschaft von $BMZ$ als Halbkreis und von $BZ$ als dessen Durchmesser, dass $MC^2 = BC \times CZ$. Aber $BC \cdot CZ = AC \cdot CJ$, weil $BZ$ und $AJ$ zwei in $C$ sich schneidende Sehnen desselben Kreises sind. Also $MC^2 = AC \cdot CJ$, also der Winkel $AMJ$ ein Rechter, d. h. ebenso gross wie $AKE$, welcher Winkel im Halbkreise ist, und folglich $MJ$ parallel zu $KE$. Damit ist die Aehnlichkeit des Dreiecks $EAK$ mit $JAM$, aber auch mit $KAJ$ bewiesen, und damit die Proportion $AM : AJ = AJ : AK = AK : AE$. Setzt man endlich $AM = AB = a$, $EA = AD = b$, $AJ = x$, $AK = y$, so ist wieder $a : x = x : y = y : b$, wie es verlangt wurde.

Aus diesem Verfahren geht die Kenntnis mehrerer wichtiger Sätze von Seiten des Erfinders hervor. Nicht bloss die beiden planimetrischen Lehrsätze, dass die Berührungslinie an den Kreis senkrecht zum Durchmesser steht und dass Kreissehnen einander in umgekehrt proportionalen Stücken schneiden, mussten ihm geläufig sein, auch von der durch Platon beklagten allgemeinen Unwissenheit auf stereometrischem Gebiete bildete er eine rühmliche Ausnahme. Archytas wusste, dass die Durchschnittsgerade zweier zu einer dritten Ebene senkrechten Ebene gleichfalls senkrecht auf dieser und insbesondere senkrecht auf deren Durchschnittsgeraden mit einer der senkrechten Ebenen steht. Er besass über die Entstehung von Cylindern und Kegeln, über gegenseitige Durchdringung von Körpern und dabei auf ihrer Oberfläche entstehenden Kurven vollständig klare Anschauungen.[1])

Ein Schüler des Archytas und Zeitgenosse Platons ist der Mathematiker Eudoxos von Knidos (geb. um 410 v. Chr.), dessen Blütezeit um das Jahr 370 v. Chr. fällt. Von seinen zahlreichen Schriften sind keine mehr vorhanden, dagegen sind uns viele vereinzelte Angaben über ihn von griechischen Schriftstellern und Mathematikern zugekommen. Sein Hauptverdienst sind die stereometrischen Entdeckungen, die ihm Archimedes zuschreibt. Die Sätze, dass jede Pyramide der dritte Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sei, ebenso der analoge Satz über Kegel und Cylinder, sollen des Eudoxos Erfindung sein. Unzweifelhaft hat Eudoxos auch die Inhaltsbestimmung der Pyramide und des Kegels zuerst aufgefunden und wahrscheinlich auch den Satz, dass die Volumina verschiedener Kugeln sich verhalten wie die Würfel ihrer Durchmesser. Auch mit dem Problem der Verdoppelung des Würfels soll er

[1]) Cantor.

sich, wie Eutokios berichtet, beschäftigt und die Lösung desselben vermittelst krummer Linien gefunden haben. Was dies für krumme Linien waren, ist unbekannt; dass keine Kegelschnitte damit gemeint sind, sagt eine Stelle des Eratosthenes: Archytas habe das Problem vermittelst des Cylinders, Eudoxos mit Hilfe der krummen Linien und die Schüler der Akademie mittelst der Kegelschnitte gelöst. — Proklos schreibt: „Eudoxos von Knidos vermehrte zuerst die Masse der allgemeinen Theoreme, fügte zu den drei (bereits bekannten) Proportionen drei neue hinzu und führte weiter aus, was von Platon über den Schnitt begonnen worden war, wobei er sich der analytischen Methode bediente." Dazu bemerkt Cantor: „Dieser Schnitt muss ein ganz bestimmter gewesen sein, ein solcher, dem die damalige Zeit die grösste Bedeutung beilegte. Das aber war der Fall mit dem Schnitt der Geraden nach stetiger Proportion, mit dem sogen. goldenen Schnitt, wie die spätere Zeit ihn genannt hat. Der goldene Schnitt tritt nun gerade in Verbindung mit Anwendung der analytischen Methode in den fünf ersten Sätzen des XIII. Buches der euklidischen Elemente auf, und die Annahme, jene fünf Sätze seien Eigentum des Eudoxos, hat sonach grosse Wahrscheinlichkeit. Es sei ergänzend nur hinzugefügt, dass Eudoxos bei Untersuchungen über die Proportionenlehre notwendig auch zu solchen Verhältnissen geführt werden musste, für welche Zahlenbeispiele nicht möglich waren und deren Behandlung nur geometrisch gelang, weil der Grieche die Zahl vorzugsweise in räumlicher Versinnlichung zu betrachten pflegte. Eudoxos hat die Proportionenlehre geometrisch betrachtet, denn ihm gehört nach Proklos Behauptung das ganze fünfte Buch des Euklid, welches der Proportionenlehre gewidmet ist, in allen seinen wesentlichen Teilen an."

Mit der Erfindung der Kegelschnitte hängt innigst zusammen die Entstehung der Theorie der geometrischen Örter, die ebenfalls den ersten Platonikern angehört. Ein geometrischer Ort im allgemeinen ist der Inbegriff von Punkten, welche insgesamt gewisse Bedingungen erfüllen, die hinwiederum durch keinen Punkt ausserhalb des geometrischen Ortes erfüllt werden. Pappos sagt uns weiter, dass man verschiedene Arten von Örtern unterschied. Ebene Oerter wurden die genannt, welche gerade Linien oder Kreislinien sind; körperliche Oerter die, welche Kegelschnitte sind; lineare Oerter, die weder gerade Linien, noch Kreislinien, noch Kegelschnitte sind.

Figur 29.

m n a m b n

Einzelne Sätze aus der Theorie der geometrischen Oerter bieten sich bereits in den Elementen der Geometrie zu ungesucht dar, dass sie schon den Geometern vor Platon sicher bekannt waren; wenigstens wäre es [1]) sehr sonderbar, wenn Sätze wie: „alle Punkte, welche von einem gegebenen gleichweit entfernt sind, liegen auf dem Umfang eines Kreises, der den gegebenen Punkt zum Mittelpunkt hat" u. a. m., nicht schon den frühesten Geometern sollten klar geworden sein. — Wenn man die einfache Forderung stellt, einen Punkt zu finden, welcher von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung habe, so wird man aus dem gegebenen Punkt, als dem Mittelpunkt, mit der gegebenen Entfernung als Radius, einen Kreis beschreiben, und jeder Punkt des Kreises wird die verlangte Eigenschaft haben. Fügt man dieser Bedingung noch die weitere bei, dass der gesuchte Punkt auch noch von einem anderen gegebenen Punkt eine andere Entfernung

[1]) Nach Bretschneider.

habe, so löst man sie auf gleiche Weise. Der gesuchte Punkt muss demnach sowohl auf dem ersten Kreis als auch auf dem andern liegen, folglich kann er nur da liegen, wo beide Kreise sich schneiden. Die Aufgabe, einen Punkt $x$ zu finden, welcher von zwei gegebenen Punkten $a$ und $b$ die gegebenen Entfernungen $m$ und $n$ hat, lässt sich also durch die Konstruktion geometrischer Oerter lösen, der gesuchte Ort ist der Durchschnitt der beiden Linien. Man sieht an diesen einfachen Beispielen, dass solche Untersuchungen schon frühe dagewesen sein müssen und dass eine Menge von Aufgaben durch Konstruktion von geraden Linien und Kreisen gelöst wurden. Das Verdienst aber, das Gemeinsame derartiger Sätze hervorgehoben und zu einer eigentlichen Theorie ausgebildet zu haben, muss der platonischen Schule und jedenfalls dem Stifter derselben zugesprochen werden. In der Theorie der geometrischen Oerter erhielt die Wissenschaft ein neues mächtiges Hilfsmittel zur Lösung von Aufgaben. Die Anwendung der Kegelschnitte auf die Lösung der so oft genannten Probleme erforderte die Kenntnis der Eigenschaften derselben als geometrische Oerter, wie wir dies bei den menächmeischen Lösungen in der That schon finden. Jene Eigenschaft der Parabel, dass das Quadrat der Ordinate gleich dem Rechteck aus der Abscisse in den Parameter, ist für alle Punkte der Parabel gültig und charakterisiert dieselbe als einen geometrischen Ort. Dennoch wurden bei den Alten die Kegelschnitte nie als solche aufgefasst, selbst nicht einmal die Ellipse definiert als der Ort aller Punkte, deren Abstandssumme von zwei gegebenen Punkten konstant ist. Dagegen spielten in der Planimetrie und Stereometrie die geometrischen Oerter eine grosse Rolle. Proklos nennt einen gewissen Hermotimos von Kolophon, der über dieselben geschrieben haben soll, und Pappos nennt Aristaeos den Aelteren, den letzten bedeutenden Mathematiker vor Gründung der alexandrinischen Schule, welcher nach Hypsikles Bericht eine Vergleichung der fünf regelmässigen Körper verfasste. Ueber die Kegelschnitte schrieb er fünf Bücher und sein Werk über körperliche Oerter hielt Pappos für eins der Hauptwerke, die man studieren müsse, um sich in der geometrischen Analysis Fertigkeit zu erwerben. Euklid soll nach Pappos Zeugnis die genannten Elemente der Kegelschnitte des Aristäos seiner eigenen Arbeit zu Grunde gelegt haben. Mit Aristäos schliesst die Reihe der voreuklidischen Mathematiker, und mit ihm zugleich endet die eigentliche Entwickelungsperiode der griechischen Geometrie. Es beginnt nun mit Gründung der alexandrinischen Schule auf Grundlage der bisherigen Forschungen der systematische Ausbau der mathematischen Wissenschaften und die eigentliche Blütezeit der hellenischen Geometrie, welcher das glänzende Dreigestirn Euklid, Archimedes und Apollonios angehört. Der Erstgenannte unterzog sich der Riesenaufgabe, das gesamte, bis zu seiner Zeit angehäufte Material zu einem organischen Ganzen zu vereinigen, und für die Zusammenstellung seiner Elemente haben ihm Aristoteles und seine Schüler nützlich vorgearbeitet, obgleich denselben keine wesentlichen Fortschritte in der Mathematik zuerkannt werden können.

## d. Die alexandrinische Schule.

Die reine Mathematik wurde in der aristotelischen Schule nur als Hilfswissenschaft betrachtet, daher auch ihre Entwickelung durch dieselbe keinen merklichen Zuwachs erfahren hat. Dass Aristoteles in der Mathematik übrigens sehr bewandert war, beweisen die zahllosen Stellen seiner Schriften, in denen er mathematische Sätze zu Hilfe nimmt oder dieselben diskutiert. Ueber die Kugelgestalt des Himmels z. B. äussert er sich folgendermassen: „Da die Kreisfläche die vollkommenste aller Flächen ist, weil sie nur von einer in sich geschlossenen Linie begrenzt ist, so ist auch die Kugel der vollkommenste aller

Körper, weil sie durch Drehung des Kreises entsteht. Dem Himmel muss aber notwendig die vollkommenste Gestalt zukommen, mithin ist er kugelförmig."

Während bei Platon der Gegensatz der Rechenkunst und der Zahlenlehre, Logistik und Arithmetik, scharf und bestimmt vorhanden war, ist erst bei Aristoteles ein ähnlicher Gegensatz zwischen der Feldmesskunst und der wissenschaftlichen Raumlehre, Geodäsie und Geometrie, nachweisbar. — Aristoteles weiss, dass eine cylindrische Rolle, welche durch eine Ebene parallel oder geneigt zur Endfläche geschnitten wird, im aufgerollten Zustande das einemal eine gerade Linie, das anderemal eine Kurve zeigt, dass ihm somit der Cylinderschnitt neben dem Kegelschnitt bis zu einem gewissen Grade merkwürdig war. — Besonders haben die Definitionen der geometrischen Grundsätze sein dialektisches Talent in Anspruch genommen und seiner strengen Logik hat man den nicht hoch genug zu schätzenden Vorteil einer klareren Beweisführung zu danken.

Das weitaus meiste, was uns über die Geometrie vor Euklides überliefert ist, stammt aus einer und derselben Quelle, nämlich aus der Geschichte der Geometrie und Astronomie bis auf Aristoteles von Eudemos von Rhodos. Da die Blütezeit desselben zwischen 340 und 310 v. Chr. fällt, so steht er Thales und dessen Nachfolgern noch nahe genug, um deren Leistungen genau beurteilen zu können. Eudemos hat darin die früheren Leistungen nicht bloss aufgezählt, sondern die Hauptlehrsätze, den Gang und Umfang ihrer Beweise, die allmähliche Verallgemeinerung derselben und das Zusammenfassen mehrerer von ihnen in ein generelles Theorem umsichtig und gründlich geschildert. Gleichzeitig wird Teophrastos von Eresos genannt als Verfasser einer Geschichte der Geometrie in vier Büchern, der Astronomie in sechs Büchern und der Arithmetik in einem Buche. Beider Werke sind leider verloren gegangen. Besonders aus des Ersteren Werk haben die Schriftsteller geschöpft, die über die astronomischen und mathematischen Entdeckungen der griechischen Philosophen geschrieben haben.

Mit dem Untergang der Selbständigkeit Griechenlands wichen auch die Wissenschaften immer mehr aus seinen Grenzen zurück. „Athen sank von seiner Höhe. Der junge makedonische Fürst, der mit 18 Jahren in der Schlacht bei Chäronea den ersten Sieg erfocht, der mit 33 Jahren aus dem Leben schied, den Beinamen des Grossen hinterlassend, ein Bezwinger der damals bekannten Welt, hatte auch die Wissenschaft genötigt, seinen Befehlen zu gehorchen. In der eigenen Heimat ihr einen Wohnsitz anzuweisen, daran dachte er nicht. Er mochte empfinden, dass die rauhe Natur des Landes und der Menschen nicht dazu angethan waren, einen Bildungsmittelpunkt abzugeben. Dafür erwuchs ein solcher in der jungen Stadt, welche Alexander auf der Landzunge gründete, die zwischen dem Mittelmeer und dem mareotischen See bis zum Nilkanal von Kanopus sich erstreckt. Als grosse ägyptische Hauptstadt sollte sie den Besitz des eben unterworfenen Aegyptens sichern. Den Namen führte sie nach dem, dessen Machtgebot sie entstehen liess, Alexandria. Wir brauchen gewiss nicht auseinanderzusetzen, wie so gerade in Aegypten der geeignete Ort für die Anlegung einer solchen Hauptstadt sich fand. Haben wir doch in der Mathematik Aegypten als ein Mutterland, wenn nicht als das Mutterland, erkennen dürfen. Gereift und gekräftigt kehrte die Mathematik nach dem Lande ihres Entstehens zurück, und es war, als ob die Sage von dem Riesen, der die Muttererde berührend aus ihr neue Stärke zieht, zur Wahrheit werden sollte. Hier auf ägyptischem Boden erprobten sich Kräfte, wie sie bisher der Mathematik noch nicht zugewandt worden waren." [1]) Die Ptolemäer Lagi, Philadelphos und Euergetes erhoben Alexandrien zur Metropole orientalischer Bildung. Sie zogen die gelehrtesten

[1]) Cantor.

Männer der damaligen Zeit an ihren prachtvollen Hof und gründeten die berühmte Akademie mit ihrer prachtvollen Bibliothek.

Einer der ersten Gelehrten, der dem Rufe der ägyptischen Mäcenaten folgte, ist der grosse Euklides. Seine wissenschaftliche Thätigkeit zu Alexandrien fällt in die Regierung des Ptolemäos Lagi, um das Jahr 300 v. Chr. Ueber seine Abstammung und sein Leben ist uns leider fast gar nichts aufbewahrt geblieben. Soviel man über seine Prinzipien und seine Lebensanschauungen noch erfahren konnte, war er ein Anhänger der platonischen Philosophie, die er unter Platons Schülern in Athen studiert haben soll. Pappos schildert seinen Charakter als sanft und bescheiden; jungen Mathematikern stand er gern mit Rat und That zur Seite, und litterarischer Stolz und Egoismus war ihm fremd. Wie tief und ernst er übrigens das Studium der Mathematik auffasste, zeigt jene Anekdote, nach welcher er dem König Ptolemäos, der ihn nach einem kürzeren und weniger mühsamen Weg, die Geometrie zu erlernen, gefragt hatte, die Antwort gab: „O König, es giebt keinen eigenen Weg für Könige zur Geometrie."

„Die Elemente nannte der berühmte Verfasser seine Schrift, die infolge ihrer Gründlichkeit und streng wissenschaftlichen Anordnung unter allen mathematischen Werken des Altertums sich den ungeteiltesten Beifall erwarb, der sich auch noch bis auf unsere Zeit erhalten hat. In demselben ist das gesamte mathematische Wissen der Griechen bis zur Lehre von den Kegelschnitten mit bewunderungswürdiger Systematik und geometrischer Strenge geordnet, und wie viele Gegner auch im Laufe der Jahrhunderte der euklidischen Methode und seinem Werke erwachsen sind, keinem ist es gelungen, nur den leisesten Zweifel über die Vortrefflichkeit desselben wachzurufen. Viele versuchten die Elemente der Mathematik von einem andern Gesichtspunkt aus und in anderer Ordnung zusammenzustellen, aber keiner hat die euklidische Klarheit und Uebersichtlichkeit erreicht. So haben denn auch die grössten Mathematiker unserer Zeit die Elemente der Geometrie geschrieben, den Plan ihrer Werke nach dem ihres hohen Meisters einzurichten versucht, und unter diesen ist unstreitig Legendre derjenige, der seinem Meister am nächsten gekommen ist."

„Das Werk des Euklides ist wie kein anderes epochemachend gewesen in der Geschichte der griechischen Mathematik. Es war das erste vollständige Lehrbuch des elementaren Teiles dieser Wissenschaft, der dadurch zu einem bestimmten Abschnitt gelangt war. Auf Grundlage dieser zusammenhängenden Darstellung der Elemente konnte ein weiterer Ausbau der Wissenschaft schneller und sicherer vor sich gehen, und jene Weitschweifigkeit und Undeutlichkeit vermieden werden, die die Beweise der älteren Geometer durchweg kennzeichnet. Auch für die Geschichte der Mathematik ist das euklidische Werk ein schätzbarer Beleg, indem es das erste ausführliche Denkmal der mathematischen Kenntnisse der Griechen ist, das auf uns gekommen. Mit ihm verschwindet jenes Dunkel, das die tiefere Einsicht in den Entwickelungsprozess der voreuklidischen Periode erschwert hat; von nun an können wir die wissenschaftlichen Fortschritte auf diese sichere Grundlage zurückführen, wodurch der Zusammenhang der Sache deutlicher hervortritt." [1])

„Ohne Zweifel sind vor Euklides schon gute Elemente der Geometrie vorhanden gewesen, die er benutzen konnte. Proklos nennt vier oder fünf frühere Verfasser von Elementen: Euklid habe aber die Entdeckungen seiner Vorgänger vervollkommnet und besonders die noch mangelhaften Beweise zur völligen Schärfe gebracht." Pappos bemerkt: „Vorzüglich aber dürfte man ihn bewundern in Bezug auf die Elemente der Geometrie, wegen ihrer Ordnung und Auswahl der

[1]) Suter.

für die Elemente zubereiteten Theoreme und Probleme. Denn er nahm nicht alles auf, was er hätte sagen können, sondern nur das, was sich in der Reihe behandeln lässt.“ [1])

„Es ist an sich schon naturgemässer, dass eine solche ausgebildete künstliche Form, wie die demonstrative Methode des Euklid sie bietet, das allmähliche Ergebnis einer durch Generationen hindurch fortgepflanzten Wissenschaft, nicht aber die persönliche Schöpfung eines Einzelnen ist. Und wie die euklidische Methode sich bis auf unsere Tage vererbt hat, wie niemand ansteht, die Lehrbücher der elementaren synthetischen Geometrie bis zum heutigen Tag als abhängig von jenen vor mehr als 2000 Jahren niedergeschriebenen Elementen zuzugestehen, so dürften wir gewiss noch weitere zwei Jahrtausende hinaufgreifen und die euklidische Methode ihrem Vaterland zurückgeben.“ [2])

Es ist im höchsten Grade wahrscheinlich, dass unter den Sätzen, welche Euklid uns aufbewahrt hat, solche waren, an denen er nicht bloss die nach ihm benannte Methode fortpflanzte, sondern selbst kennen lernte; mit andern Worten Sätze, die schon durch Pythagoras und seinen griechischen Vorgänger Thales gelehrt wurden; Sätze, die noch früher in derselben Form in Aegypten bekannt waren. Wir sind durch Proklos, sowie durch Diog. Lärtios und schon durch Platon in den Stand gesetzt, einzelne Theoreme der Geometrie als thaletisch und pythagoräisch nachzuweisen. Damit soll keineswegs gesagt sein, Thales und Pythagoras hätten nur die Sätze gelehrt, welche ihnen zugeschrieben werden; im Gegenteil sind darin nur einige der neuen Erfindungen zu sehen, mit welchen beide die Wissenschaft bereichert haben. Das Grosse und Ganze ihrer Lehren ist vielmehr unter jenen weitaus zahlreicheren Sätzen zu suchen, die von einem Elementarschriftsteller auf den andern sich vererbten, ohne dass man deren Erfinder anzugeben weiss. Unter diesen anonymen Sätzen sind sicher auch urägyptische enthalten.

Das Werk des Euklides zerfällt in vier Teile mit 15 Büchern. Der erste Teil, die 6 ersten Bücher umfassend, handelt über die Planimetrie; der zweite Teil mit dem VII., VIII. und IX. Buche enthält die Arithmetik; der dritte, bestehend aus dem X. Buch, ist eine Abhandlung über die kommensurablen und inkommensurablen Linien, und der vierte Teil mit den 5 letzten Büchern handelt über die Stereometrie. Das XIV. und XV. Buch werden gewöhnlich nicht dem Euklid, sondern dem Alexandriener Hypsikles zugeschrieben, der nach einigen zur Zeit des Ptolemäos, nach andern ums Jahr 150 v. Chr. gelebt haben soll, welch letztere Ansicht die grössere Wahrscheinlichkeit zu haben scheint.

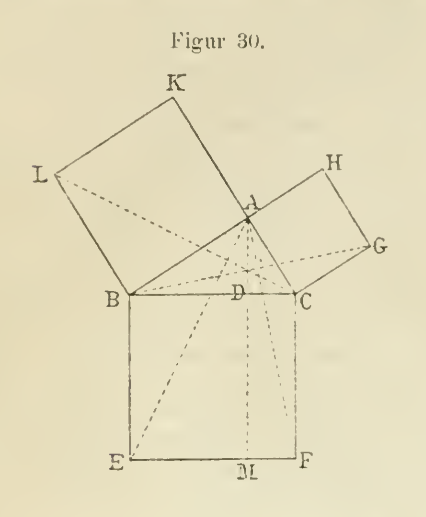
Im I. Buche handelt Euklid von den Grundbestandteilen geradliniger Figuren in der Ebene, von geraden Linien, welche sich entweder schneiden und mit einer dritten Linie ein Dreieck bilden, über dessen Bestimmtheit durch gewisse Stücke gesprochen wird; — Kongruenz der Dreiecke — oder welche sich nicht treffen, soweit man sie verlängert — Parallellinien. Um mit Hilfe der parallelen Linien eine Figur zu erzielen, bedarf es zweier schneidenden Geraden, und so entsteht das Viereck, insbesondere das Parallelogramm, sofern die Schneidenden unter sich parallel sind. Die Eigenschaften der Parallelogramme, vereinigt mit denen der Dreiecke, führen zum Begriffe von Figuren, welche aus an und für sich identischen Teilen bestehen, aber nicht in identischer Weise zur gegenseitigen Deckung gebracht werden können, Gleichheit von nicht kongruenten Flächenräumen. Bei solchen Flächen kommt es also darauf an, die identischen Teile abzusondern, in anderer Weise zusammenzufügen, und so lehrt der 44. Satz, an eine gegebene gerade Linie unter gegebenem Winkel ein

[1]) Klügel. — [2]) Poppe.

Parallelogramm anzulegen, welches einem gegebenen Dreieck gleich sei; es lehrt der 45. Satz die Verwandlung jeder geradlinigen Figur in ein Parallelogramm von gegebenen Winkeln, bis im 47. und 48. Satz das Buch mit dem interessantesten Falle einer derartigen Umwandlung, mit dem pythagoräischen Lehrsatz und dessen Umkehrung abschliesst.

Es wurde schon bei Pythagoras bemerkt, dass der uns überlieferte älteste und bekannteste Beweis seines berühmten Satzes nicht von ihm, sondern von Euklides herrührt. Derselbe ist trotz vieler neueren Beweise (in Mainz erschien 1821 Joh. Jos. Ign. Hoffmann, der pythagoräische Lehrsatz mit 32 Beweisen) gegenwärtig noch in jedem Lehrbuch der Elementargeometrie enthalten und beruht darauf, dass zunächst die Richtigkeit der beiden Gleichungen $AB^2 = BD \cdot BC$ und $AC^2 = CD \cdot BC$ nachgewiesen wird, oder was dasselbe ist, dass $AB^2 \doteq$ Rechteck $BM$, $AC^2 \doteq$ Rechteck $CM$ ist. Man zeigt zunächst, dass $\triangle LBC \cong \triangle ABE$ und $\triangle BCG \cong \triangle ACF$ ist. Da nun jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms ist, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, so ist $\triangle LBC = \frac{1}{2} AB^2$ und Dreieck $ABE = \frac{1}{2}$ #lgr $BM$, folglich auch

Figur 30.




$AB^2 =$ #lgr $BM$ und aus demselben Grunde

$AC^2 =$ #lgr $CM$ und somit die Summe

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Die beiden Euklidischen Hilfslinien $CL$ und $AE$ haben den Zweck, das Quadrat $BK$ zu dem Rechteck $BM$ in Beziehung zu setzen und statt beider Figuren Dreiecke, nämlich $\triangle LBC$ und $\triangle ABE$, in die Betrachtung einzuführen.

Das II. Buch ist gewissermassen ein Zusatz zu dem pythagoräischen Lehrsatz. In ihm wird die Herstellung eines Quadrats aus Quadraten und Rechtecken in den verschiedensten Kombinationen, teils als Summe, teils als Differenz gelehrt, bis auch wieder eine Zusammenfassung in der Aufgabe erfolgt, ein jeder gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu zeichnen. Als 11. Satz erscheint die Aufgabe des goldenen Schnittes.

Das III. Buch wendet sich zu der einzigen krummen Linie, welche der Behandlung unterzogen wird, zum Kreise und zu den Sätzen, welche auf Berührung zweier Kreise oder eines Kreises und einer Geraden sich beziehen. Alsdann folgen Betrachtungen über die Grösse von Winkeln und mit denselben irgendwie in Verbindung stehenden Kreisabschnitten. Insbesondere ist der 16. Satz Ausgangspunkt interessanter Streitigkeiten geworden und dadurch, sowie durch seinen Inhalt, bemerkenswert. Er behauptet nämlich, der Winkel, welchen der Kreisumfang mit einer Berührungslinie bildet, sei kleiner als irgend ein geradliniger spitzer Winkel. Dieser gemischtlinige Winkel heisst bei Proklos „hornförmiger Winkel“, ein Name, der bei Euklid noch nicht vorkommt. Endlich schliesst das III. Buch mit den einzeln betrachteten Fällen zweier Geraden, die sich gegenseitig und ebenso einen Kreis schneiden.

und aus deren Abschnitten gewisse Rechtecke zusammengesetzt werden, welche Flächengleichheit besitzen.

Der Schüler wird nun im IV. Buche weiter mit den Figuren bekannt gemacht, welche entstehen, wenn mehr als zwei Gerade mit dem Kreise in Verbindung treten. Er lernt die dem Kreise ein- und umgeschriebenen Vielecke, insbesondere die regelmässigen Vielecke kennen. Unter diesen ist das Fünfeck und dessen Konstruktion macht die erste Anwendung des goldenen Schnittes notwendig. Die Gleichheit von Strecken und Flächenräumen ist nach allen Seiten erörtert.

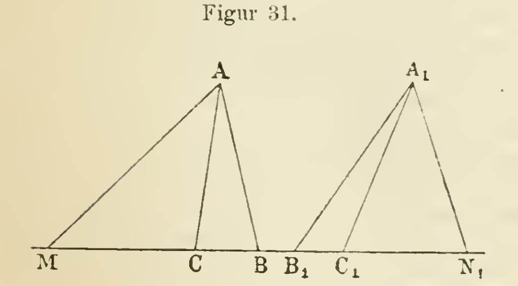
Nun kommt die Ungleichheit in Betracht, insofern sie gemessen werden kann, und zwar ist diese Messung eine zweifache, eine geometrische und eine arithmetische. Beide beruhen auf der Lehre von den Proportionen, welche deshalb in dem V. Buche an dem Sinnbilde gerader Linien in vollständiger Ausführlichkeit dargelegt wird. Die im Verhältnisse aufgefassten Grössen sind als Linien nebeneinander gezeichnet, ohne Figuren zu bilden, damit man einsehe, wie es sich hier um allgemeineres handle als um die Vergleichung geometrischer Gebilde.

Erst das VI. Buch zieht die geometrischen Folgerungen aus dem im V. Buche Erlernten. Die Aehnlichkeit von Figuren geht aus der Proportionenlehre hervor und dient selbst wieder dazu, Proportionen an geometrischen Figuren zur Anschauung zu bringen. Der erste Satz lautet: Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien. Beweis: Es seien $ABC$, $A_1B_1C_1$ zwei Dreiecke von gleicher Höhe, $BC$, $B_1C_1$ ihre Grundlinien, die man verlängere und resp. $m$ und $n$mal aneinander setze, so dass $BM = m \cdot BC$, $B_1N_1 = n \cdot B_1C_1$. Da nun $ABM \gtreqless A_1B_1N_1$ ist, je nachdem $BM \gtreqless B_1N_1$, so ist gleichzeitig

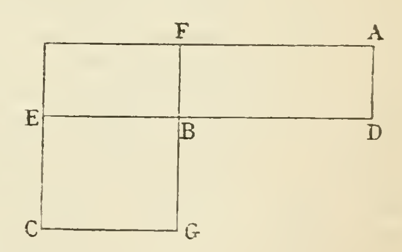
$$m \cdot ABC \gtreqless n \cdot A_1B_1C_1 \text{ und } m \cdot BC \gtreqless n \cdot B_1C_1$$

so ist
$$ABC : A_1B_1C_1 = BC : B_1C_1.$$

Figur 31.




Figur 32.




Satz 14 lautet: Zwei Rechtecke $AB$, $BC$, in denen die Seiten im umgekehrten Verhältnis stehen:

$$DB : BE = GB : BF$$

sind an Flächeninhalt gleich. Beweis: Man lege die beiden Rechtecke mit einer Ecke $B$ so aneinander, dass je zwei Seiten in gerader Linie liegen. Man vollende das Rechteck $EF$, dann ist

$$DB : BE = AB : FE$$
$$GB : BF = BC : FE$$

also nach der Voraussetzung

$$AB : FE = BC : FE$$

folglich $$AB = BC.$$

Hieraus folgt dann Satz 16, dass wenn vier Strecken $a, b, c, d$ proportional sind,

$$a : b = c : d$$

so sind die Rechtecke $ad$ und $bc$ einander gleich. In Satz 28 und 29 handelt es sich um die Anlegung eines einem gegebenen Parallelogramm gleickwinkligen Parallelogramms an eine gerade Linie, welches um soviel grösser oder kleiner an Fläche als eine gleichfalls gegebene Figur sei, dass, wenn soviel abgeschnitten oder zugesetzt wird, als nötig ist, um Flächengleichheit zu erzielen, dieses Stück selbst dem erstgegebenen Parallelogramm ähnlich werde.

Das VII., VIII. und IX. Buch beschäftigt sich mit der Lehre von den Zahlen.

Im X. Buche ist der III. Hauptteil des Euklidischen Werkes behandelt, die Lehre von den Inkommensurablen. An der Spitze des Buches steht der Satz, welcher bei Euklid die Grundlage der Exhaustionsmethode bildet, der Satz: „Sind zwei ungleiche Grössen gegeben und nimmt man von der grösseren mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte und so immer fort, so kommt man irgend einmal zu einem Reste, welcher kleiner ist als die gegebene kleinere Grösse.“ Daran knüpfen sich zwar geistvolle, doch überaus weitläufige Untersuchungen, unter welchen Voraussetzungen Grössen sich wie gegebene Zahlen verhalten, also kommensurabel sind, und unter welchen Voraussetzungen keine solchen Zahlen sich finden lassen, die Grössen also inkommensurabel sind.

Der Inhalt des letzten Hauptteiles der Euklidischen Elemente, der in dem XI., XII. und XIII. Buche enthaltenen Stereometrie, beginnt genau in der Weise, wie sie auch heute noch behandelt zu werden pflegt, mit den Sätzen, welche auf parallele und senkrechte gerade Linien und Ebenen sich beziehen, woran Untersuchungen über Ecken sich schliessen. Alsdann wendet sich der Verfasser zu einem besonderen Körper, dem Parallelepipedon, und geht nur in dem letzten Satze des Buches zu dem allgemeineren Begriff des Prisma über.

Das XII. Buch enthält die Lehre von dem Masse des körperlichen Inhalts der Pyramide, des Prismas, des Kegels, des Cylinders und endlich der Kugel. Eine wirkliche Berechnung findet sich allerdings bei Euklid nie, weder wo von Flächeninhalten noch wo von Körpermassen die Rede ist, und namentlich bei solchen Raumgebilden, zu deren Erzeugung Kreise oder Kreisstücke beitragen, ist nirgends angegeben, wie man eigentlich zu rechnen habe, und zwar nimmt Cantor an, dass Euklid die Ausrechnung des Kreisinhalts als der Geodäsie angehörig absichtlich weggelassen habe. In der eigentlichen oder theoretischen Geometrie war Rechnung als solche ausgeschlossen. Aristoteles hat ausdrücklich gesagt: „Man kann nicht etwas beweisen, indem man von einem anderen Genus ausgeht, z. B. nichts Geometrisches durch Arithmetik . . . Wo die Gegenstände so verschieden sind wie Arithmetik und Geometrie, da kann man nicht die arithmetische Beweisart auf das, was den Grössen überhaupt zukommt, anwenden, wenn nicht die Grössen Zahlen sind, was nur in gewissen Fällen vorkommen kann,“ und was hier von den Beweisen gesagt ist, scheint auch auf Rechnungsoperationen ausgedehnt worden zu sein. So zeigt also Euklides in dem XII. Buche nur, dass Kreise wie die Quadrate ihrer Durchmesser sich verhalten, was Hippokrates von Chios wusste; er zeigt, dass, wie die Pyramide der dritte Teil des Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche ist, ein ganz gleichlautender Satz für Kegel und Cylinder stattfindet, was Eudoxos von Knidos schon erkannt hatte; er schliesst mit dem Satze, dass Kugeln im dreifachen Verhältnis ihrer Durchmesser stehen.

Das XIII. Buch endlich kehrt zu einem Gegenstand zurück, dem das IV. Buch teilweise gewidmet war. Es handelt von den regelmässigen, einem Kreise einbeschriebenen Vielecken, insbesondere von den Fünfecken und Dreiecken. Dann aber benutzt es diese Figuren als Seitenflächen von Körpern, welche in eine Kugel einbeschrieben werden, und schliesst mit der wichtigen Bemerkung, dass es keine weiteren regelmässigen Körper geben könne, als die fünf zuletzt erwähnten, nämlich das Tetraeder, das Oktaeder, das Ikosaeder, die von Dreiecken begrenzt sind, den Würfel, dessen Seitenflächen Quadrate sind, und das Dodekaeder, welches von Fünfecken eingeschlossen ist.

„Euklides wollte, wie die übrigen Elementenschreiber vor ihm es schon versucht hatten, eine vollständige Uebersicht aller Teile der Mathematik geben, welche in den folgenden Teilen der Wissenschaft zur Anwendung kommen, wollte zugleich die encyklopädisch zusammengestellten und geordneten Dinge auf strenge Beweise stützen, welche einen Zweifel nicht aufkommen lassen, sondern vielmehr gestatten, wie in eine Rüstkammer blindlings dorthin zu greifen, mit der Gewissheit, stets eine tadellose Waffe zu erfassen. Im Schatten dieses Riesenwerkes verkümmerten die früher vorhandenen ähnlichen Erzeugnisse und gingen zu Grunde.“ [1])

„Durch Euklid ist der Begriff der Elemente für alle Zeit festgestellt worden, und unsere heutigen Lehrbücher der Elementargeometrie behandeln im Wesentlichen denselben Umkreis von Lehren, wie Euklids 13 Bücher; nur dass sie die platonischen Körper, auf welche das Altertum herkömmlich so grossen Wert legte, mit weniger Ausführlichkeit behandeln, dafür aber einige planimetrische Theorien aufzunehmen pflegen, die bei Euklid fehlen, wie die Sätze von den einem Kreise ein- und umbeschriebenen Dreiecken und Vierecken, von den sogen. Transversalen im Dreieck, den Höhenperpendikeln u. s. w., vom Schwerpunkt der Figuren, von dem Umfang des Kreises, der Oberfläche der Kugel, des Kegels und Cylinders, dem Inhalt der Kugel u. s. w.“ [2])

Noch mehr als für den Inhalt ist Euklids Werk für die Form der Geometrie das klassische Vorbild geworden. Von den Alten haben Theon von Alexandrien und Proklos den Euklid kommentiert und der Römer Boëthius denselben ins Lateinische übersetzt. Des Proklos Kommentar ist besonders wertvoll durch seine zahlreichen historischen Notizen. Unter den orientalischen Gelehrten hat der Perser Nassir Eddin in der Mitte des 13. Jahrhunderts eine ausgezeichnete Uebersetzung des Euklid in arabischer Sprache gegeben, die 1598 zu Florenz gedruckt wurde. Aus dieser und anderen arabischen Uebersetzungen wurde vor dem 16. Jahrhundert Euklid ins Lateinische übertragen und den Abendländern bekannt. Die erste griechische Ausgabe erschien 1533 zu Basel. Von da an folgten sich die Ausgaben in endloser Reihenfolge, ein Beweis, wie allgemein die grosse Bedeutung dieses Werkes anerkannt wurde. Unter die vorzüglichsten gehören diejenigen von Clavius, Dasypodius, Barrow und namentlich die Ausgabe des David Gregory von 1703 (Oxford), welche die sämtlichen Werke Euklids griechisch und lateinisch enthält. Eine sorgfältige deutsche Uebersetzung aller 15 Bücher lieferte Lorenz am Ende des vorigen Jahrhunderts und die bemerkenswerteste Ausgabe der neueren Zeit ist die vom Jahr 1825 von Camerer und Hauber.

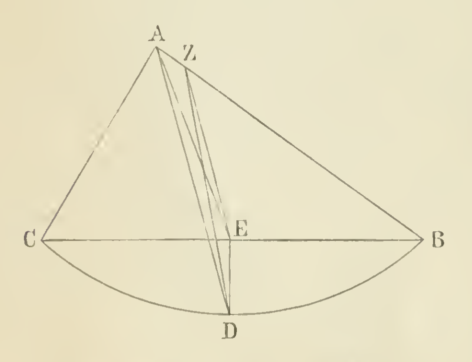
Die übrigen Abhandlungen des grossen Mathematikers wurden durch seine Elemente in den Hintergrund gedrängt. Es sind von ihm noch vorhanden seine *Δεδόμενα* oder Data sive theoremata geometrica, eine Sammlung von 95 Lehrsätzen, in welchen gezeigt wird, wie durch etwas bestimmt Gegebenes zugleich

[1]) Cantor. — [2]) Hankel.

etwas Anderes gegeben ist; z. B. es seien zwei parallele Gerade gegeben, und auch der Winkel, unter dem eine dritte Gerade die Parallelen schneiden soll, so ist damit auch die Grösse dieser dritten Geraden bestimmt; oder: wenn in einem Dreieck jeder Winkel der Grösse nach gegeben ist, so ist das Dreieck der Art nach gegeben u. s. w. „Die Data sind eine Art geometrischer Sätze, deren Vorhandensein vor Euklid sich nicht nachweisen lässt, und es ist sehr wahrscheinlich, dass, wenn sie nicht von ihm zuerst eingeführt wurden, sie doch nicht lange vor ihm entstanden sein können. Hier soll nicht gezeigt werden, wie eine vorgeschriebene Aufgabe gelöst, selbst nicht, wie eine Behauptung bewiesen werden könne, obschon dies äusserlich so scheint; diese Sätze bilden vielmehr kleine Kreise selbständiger Forschungen, welchen bloss das Resultat vorangestellt wurde. Man erkennt in den Beweisen den Weg des Forschers, auf welchem er zu neuen Ergebnissen gelangte. Die Betrachtungen, welche hier angestellt wurden, zeigten bloss, dass mit gewissen Dingen auch andere gegeben waren, aber noch nicht wie diese gefunden werden konnten. Die Forschung lieferte den Stoff zur weiteren Verarbeitung. In dieser Beziehung sind die Data höchst wichtig; sie gestatten uns eine Einsicht in den Uebergang der griech. Geometrie in eine neue Richtung, sie bilden das Mittelglied zwischen den Elementen und Porismen.“ [1]) Euklides soll nach Proklos und Pappos Zeugnis noch mehrere andere Schriften geometrischen Inhalts verfasst haben, so vor allem vier Bücher über Kegelschnitte, in welchen er als eine Fortsetzung der Elemente dasjenige zusammengestellt hatte, was bis dahin aus diesem höheren Teile der Geometrie bekannt war. Wahrscheinlich haben wir in des Apollonios vier ersten Büchern über die Kegelschnitte das euklidische Werk im Wesentlichen noch erhalten. Die vier letzten Bücher des Apollonios bilden die Fortsetzung derselben. Auch über ebene und Flächenörter hat Euklides geschrieben, welche Abhandlungen ebenfalls verloren gegangen sind.

Proklos berichtet noch von einer weiteren geometrischen Aufgabensammlung, welche Euklid verfasste und welche den Namen des Buches von der Teilung der Figuren führte. Einige Beispiele daraus sind folgende: Das Dreieck wie das Viereck werden durch eine einer gegebenen Geraden parallele Linie nach gegebenem Verhältnisse geteilt. Eine ähnliche Aufgabe ist für das Fünfeck gestellt. Endlich ist die Aufgabe gestellt, eine von einem Kreisbogen und zwei einen Winkel bildenden Geraden gebildete Figur in zwei gleiche Teile zu teilen. Die Figur $ABDC$ wird, wenn $E$ die Mitte der Sehne $BC$ bezeichnet, durch die gebrochene Linie $AED$ halbiert. Wird alsdann $EZ$ parallel zu $AD$ gezogen, so haben die Dreiecke $AZD$ und $AED$ gleichen Inhalt und mithin halbiert auch die Gerade $DZ$ unsere Figur.

Figur 33.




„Auch überlieferte er Methoden des durchdringenden Verstandes, mit Hilfe deren wir den Anfänger in dieser Lehre in der Aufsuchung der Fehlschlüsse üben und selbst unbetrogen bleiben können. Die Schrift, durch welche er uns diese Ausrüstung verschaffte, betitelte er ψευδάρια (Trugschlüsse). [2])

[1]) Arneth. — [2]) Pseudos (griech.) soviel wie unwahr, unecht, täuschend.

Er zählt die verschiedenen Arten derselben der Reihe nach auf und übt bezüglich jeder unsern Verstand in allerlei Lehrsätzen, indem er dem Falschen das Wahre gegenüberstellt und den Beweis des Truges mit der Erfahrung zusammenhält.“ [1])

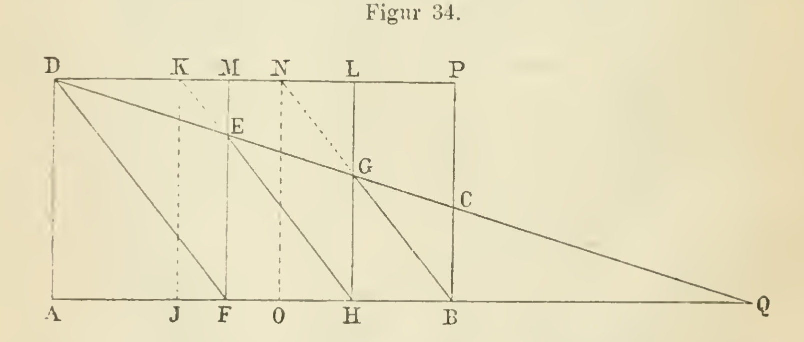
Als ein Hauptwerk des Euklides werden auch die Porismata in drei Büchern genannt, wovon Pappos sagt, dass sie eine höchst kunstreiche Sammlung von Sätzen sind, die zur Analysis der schwereren und allgemeineren Aufgaben dienen, wovon die Natur eine unendliche Menge an die Hand gebe. — Porisma nennt Euklid in seinen Elementen das, was wir Zusatz oder Korollar nennen, also einen Satz, der aus einem bewiesenen Satze oder der Auflösung einer Aufgabe unmittelbar folgt. Das griechische Wort πορος bedeutet etwas, das einen Uebergang oder Durchgang gewährt, daher poröse Körper. Daraus ergibt sich der Grund der Benennung jener leichten Folgerungssätze. Wie aber Euklid die leichteste Art von Sätzen und eine für die damalige Zeit sehr schwere und künstliche mit demselben Kunstwort habe andeuten können, ist nicht so leicht erklärbar. Nach Klügel (mathem. Wörterbuch) hat Euklid dadurch andeuten wollen, dass die Porismen einen Uebergang von gegebenen Dingen zu einem bestimmten, wenn gleich noch unbekannten, durch veränderliche Dinge angeben. Sie sind daher Theoreme und Probleme zugleich. Damit in Uebereinstimmung schreibt Cantor: „Ein Porisma war gewissermassen eine Verbindung von Theorem und Problem, ein Theorem, welches ein Problem anregte und einschloss. Ein Beispiel liefert etwa der Satz, dass, wenn ein Kreis gegeben ist, der Mittelpunkt desselben immer gefunden werden kann, denn an ihn knüpft sich die Aufgabe, die Konstruktion zu ermitteln, durch welche man den Mittelpunkt wirklich erhält, mit Notwendigkeit an.“ Pappus drückt sich hierüber auf folgende Weise aus: „Die Porismen gehören weder zu den Theoremen, noch zu den Problemen, sondern stehen ihrer Form und ihrem Wesen nach zwischen beiden mitten inne, so dass sie sowohl als Theoreme als auch als Probleme ausgesprochen werden können. Daher kommt es, dass einige Geometer dieselben für Theoreme, andere für Probleme gehalten haben, indem sie sich an die blosse Form des Satzes hielten. Die Alten haben aber den Unterschied dieser drei Gattungen besser aufgefasst, wie aus ihren Definitionen erhellt. Nach ihnen bezweckt ein Theorem die Beweisführung für das, was der Satz ausspricht; ein Problem die Konstruktion dessen, was vorgelegt ist; ein Porisma dagegen bezweckt die Auffindung und Erforschung des Vorgelegten. Diese Definition des Porismas ist von den Neueren geändert worden, die nicht Alles erforschen (porismieren) können, sondern, auf diese Elemente gestützt, nur zeigen, dass das, was gesucht wird, ist, nicht aber dieses selbst aufsuchen.“ Arneth bemerkt hierzu: „Der letzte Teil scheint kaum einen Zweifel über die Bedeutung zuzulassen; Pappus drückt sich deutlich genug aus, und man darf sich nur durch das Vorausgehende nicht irre machen lassen. Porizein ist identisch mit unserem deutschen Forschen, beide von einem Stamme mit der Sanskritwurzel „pri“, bewegen, vorwärtsbringen; daher die Bedeutung des griechischen Zeitwortes: etwas in Gang oder vorwärtsbringen, fördern; bildlich, in der Wissenschaft hervorbringen, erforschen. Die Porismen waren daher Forschsätze, d. h. solche, welche in genetischer Form entwickelt das Resultat der Forschung darstellten. Pappus belehrt uns zugleich, wenn auch nur dürftig, über deren Inhalt; die Untersuchungen bezogen sich auf die Theorie der Transversalen, die harmonischen und anharmonischen Verhältnisse und die Involution, überhaupt auf die Teile der Geometrie, welche die schönsten Erfolge der Neuzeit sind. Aus dem, was

[1]) Pappos.

Pappus über die späteren Griechen und über ihr Verständnis der Geometrie sagt, ist kaum zu zweifeln, dass das, was er uns aufbewahrt hat, nur dürftige Reste des einst Vorhandenen sind; wie weit aber die Griechen in diesen Untersuchungen gekommen waren, ist nach den vorhandenen Hilfsmitteln nicht mehr zu erörtern. Die Grundlagen dieser Untersuchungen sind so allgemeiner Natur, dass sie eine reiche Quelle bilden, aus welcher, bei gehöriger Handhabung, mit Leichtigkeit zahllose Wahrheiten hergeleitet werden können: diese waren die Porismen. Man muss den Unterschied wohl ins Auge fassen: ein Porisma war nicht etwas zum Beweise Vorgelegtes oder zu Konstruierendes, sondern ein aus einer allgemeinen Grundlage zu Erfindendes, Abzuleitendes. Hieraus erklärt sich nun auch die zweifache Bedeutung des Wortes; in der Hauptbedeutung hatte man einen Satz zu erfinden, d. h. durch Verwendung der geeigneten Mittel einen allgemeinen Satz in einem bestimmten Falle zur Anwendung zu bringen, und dadurch einen neuen Satz daraus abzuleiten; in der andern Bedeutung hatte man nur aus einem Satze andere Sätze, welche in ihm ohne weiteres enthalten waren, abzuleiten. Wie leicht es hierbei möglich war, beide Bedeutungen zu vermengen und die Hauptsache nicht mehr zu verstehen, so wie die Griechen nicht mehr produktiv waren, leuchtet von selbst ein, und Pappus weist uns auch darauf hin."

Einer der grössten Gelehrten der Alexandrinischen Schule war Eratosthenes, geb. 276 v. Chr. in Kyrene, gest. 196 v. Chr. Derselbe hat sich in allen Gebieten der mathematischen Wissenschaften gleich vorteilhaft ausgezeichnet. In Geometrie soll er nach des Proklos und Pappos Zeugnis über die Kegelschnitte und über die geometrischen Oerter vortreffliche Abhandlungen geschrieben haben, von denen wir aber nichts weiter als die Titel kennen. Er beschäftigte sich auch mit der Verdoppelung des Würfels und es ist uns eine mechanische Lösung dieses Problems von Eutokios aufbewahrt worden. Der dazu angewandte und eigens dazu erfundene Apparat, das Mesolabium, bestand aus drei einander gleichen rechtwinkligen Täfelchen von Holz, Elfenbein oder Metall, welche zwischen zwei mit je drei Rinnen versehenen Linealen eingeklemmt in diesen Rinnen übereinander

Figur 34.




weggeschoben werden konnten. Es seien $ADMF$, $JKLH$ und $ONPB$ die drei kongruenten Rechtecke, ihre gemeinschaftliche Höhe $AD$ und der Abschnitt $CB$ seien die gegebenen Geraden, zu denen die zwei mittleren Proportionalen gefunden werden sollen. Man schiebe nun die drei Rechtecke so weit ineinander, dass die Endpunkte $E$ und $G$ der unverdeckten Stücke der parallelen Diagonalen mit $D$ und $C$ in einer Geraden liegen, dann ist aus der Aehnlichkeit der Dreiecke leicht einzusehen, dass $EF$ und $GH$ die gesuchten Geraden sind, dass sich also verhält $AD : EF = EF : GH = GH : CB$.

Bald nach Euklid zeigte sich eine neue Erscheinung, welche von jetzt an für immer festgehalten wurde und die für die praktische Anwendung der Mathematik von der grössten Wichtigkeit war: die Einführung der Arithmetik in die Geometrie. Diese Neuerung verdankt man Archimedes. Kein Geometer vor ihm hat jemals eine Linie durch Zahlen dargestellt oder eine Rechnung zu geometrischen Zwecken ausgeführt; dieses war den Feldmessern, überhaupt jenen Personen vorbehalten, deren Geschäft es war, die Geometrie auf die gewöhnlichen Verhältnisse des Lebens anzuwenden.

Archimedes, geb. 287 v. Chr. zu Syrakus, war neben den Alexandrinern unstreitig das grösste mathematische Genie des Altertums, der eigentliche Schöpfer der Mechanik und der höheren Geometrie. Er brachte diese Wissenschaften auf den höchsten Punkt der Entwickelung, den sie im Altertum erreicht haben und den sie 19 Jahrhunderte lang, bis auf Galilei und Descartes nicht zu übersteigen vermochten. Seine mechanischen und geometrischen Schriften bilden eine einzige fortlaufende Kette von Erfindungen, die wohl durch das, was verloren gegangen, noch einen beträchtlichen Zuwachs erhalten würden.

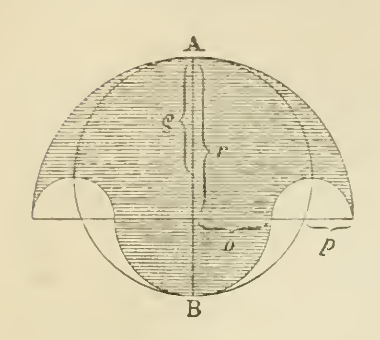
Aus dem Leben Archimedes sind nur einzelne hervorragende Züge bekannt. Er war Verwandter des Königs Hiron, dessen Liebe zu den Wissenschaften ihn in Syrakus festhielt. Sein brennender Eifer für die Wissenschaften hinderte ihn sogar an den notwendigsten Geschäften des täglichen Lebens. Diener mussten ihn mit Gewalt aus seinem Arbeitskabinet zur Tafel reissen. Dieser Zug seines Lebens wird denn auch als die Ursache seines Todes angegeben. Archimedes wurde bei der Erstürmung der Stadt Syrakus (212 v. Chr.) von einem in sein Zimmer eindringenden römischen Soldaten, während er in mathematische Figuren vertieft auf dem Boden sass, niedergestossen. Mehr um diese als um sein Leben besorgt, hatte er jenem das berühmte Noli turbare circulos meos! (Verdirb mir meine Kreise nicht!) zugerufen. Der über solche Gleichgültigkeit erzürnte Krieger machte aber Gebrauch von seiner Waffe. Auf Archimedes Grabmal wurde nach seinem Wunsch ein Cylinder mit einer einbeschriebenen Kugel gezeichnet, als bescheidener Repräsentant seiner grossen Erfindungen.

Das fruchtbarste Wirkungsfeld des archimedischen Geistes war die Flächen- und Inhaltsberechnung krummer Linien und Oberflächen. Seine noch vorhandenen geometrischen Schriften enthalten in systematischer Reihenfolge: die Ausmessung des Kreises, die des Cylinders und der Kugel, die Quadratur der Parabel und die Inhaltsberechnung der Konoiden und Sphäroiden. Dann folgen zwei Abhandlungen über die Spirallinien und die Schwerpunktsbestimmungen ebener Figuren, mit Hilfe letzterer er die Quadratur der Parabel bestimmte. Hierzu kommt noch die Schrift über die Zahl des Sandes und die beiden physikalischen Abhandlungen über die schwimmenden Körper und über die Brennspiegel. Von seinen in Konstantinopel noch aufgefundenen Werken geometrischen Inhalts ist die älteste Ausgabe die von Venatorius, Basel 1544, die beste: Archimedes quae supersunt opera omnia, cum Eudocii Ascalonitae commentariis, herausgegeben von Jos. Torelli, Oxford 1792, übersetzt von Nizze, Stralsund 1824.

Ein Metriker aus dem Jahre 500 etwa, Atilius Fortunatianus, erzählt von einem geometrischen Spielwerke, von dem loculus Archimedius. Ein elfenbeinernes Quadrat war in 14 Stücke von verschiedener vieleckiger Gestalt zerschnitten, und es handelte sich darum, aus diesen Stücken das ursprüngliche Quadrat, aber auch sonst beliebige Figuren zusammenzulegen. Es bleibe dahingestellt, ob Archimedes wirklich selbst dieses Spiel erdachte, oder ob man nur als archimedisch, d. h. als sehr schwierig bezeichnen wollte, die einzelnen Gestaltungen herzustellen.

Als geometrisch interessant bieten sich uns ferner einige Wahlsätze. Das unter diesem Titel bekannte, aus 15 Sätzen der ebenen Geometrie bestehende Buch enthält u. a. folgendes: Der 11. Satz besagt, dass wenn in einem Kreise zwei Sehnen sich senkrecht durchschneiden, die Quadrate der vier so gebildeten Abschnitte zusammen dem Quadrat des Durchmessers gleich sein müssen. Der 14. Satz lehrt den Flächeninhalt des S a l i n o n (Salzfass) oder der Wogengestalt messen. Diese Figur entsteht, wenn man über und unter derselben Geraden als Richtung des Durchmessers von demselben Mittelpunkt aus, aber mit verschiedenen, in beliebigem Verhältnis zu einander stehenden Halbmessern Halbkreise beschreibt, zu welchen noch zwei Halbkreischen nach der Seite des grossen Halbkreises hin gerichtet, über dem, durch den nach der Jenseite sich wölbenden kleineren Halbkreis freigelassenen Stückchen des Durchmessers treten. Wird durch den Mittelpunkt der beiden erstgezeichneten Halbkreise und senkrecht zu deren Durchmesser die Strecke $AB$ gezeichnet, so ist der um dieselbe als Durchmesser beschriebene Kreis dem Salinon flächengleich. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich leicht aus folgender Betrachtung: Bezeichnet man, wie es in Figur 35 geschehen ist, die verschiedenen Halbmesser mit $r$, $o$ $p$ und $\varrho$, so muss nach dem erwähnten Lehrsatz

Figur 35.




$$\varrho^2\pi = \frac{1}{2}r^2\pi + \frac{1}{2}o^2\pi - 2\cdot\frac{1}{2}p^2\pi$$

sein, denn das Salinon besteht aus dem mit $r$ gezeichneten Halbkreis plus dem mit $o$ gezeichneten Halbkreis, minus zweimal dem Halbkreis vom Halbmesser $p$ und diese Fläche soll gleich sein der mit $\varrho$ gezeichneten Kreisfläche, oder

$$\text{a)} \ldots\ldots \varrho^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}o^2 - p^2.$$

Nun ist aber $r = o + 2p$ und

$$\varrho = \frac{1}{2}(r + o) \text{ oder } \varrho = \frac{1}{2}(o + 2p + o) \text{ oder } \varrho = o + p.$$

Setzt man diese Werte für $\varrho$ und $r$ in die Gleichung a), so ergibt sich

$$o^2 + 2op + p^2 = \frac{1}{2}(o^2 + 4op + 4p^2) + \frac{1}{2}o^2 - p^2$$
$$\text{oder } o^2 + 2op + p^2 = \frac{1}{2}o^2 + 2op + 2p^2 + \frac{1}{2}o^2 - p^2$$
$$\text{oder } o^2 + 2op + p^2 = o^2 + 2op + p^2$$
$$\text{oder } 1 = 1.$$

Eine andere interessante Figur ist Archimedes' Arbelus (oder Schustermesser). Dieselbe entsteht, wenn man über der Hypotenuse und über den Projektionen der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks (als Durchmesser) Halbkreise nach derselben Seite hin beschreibt, und es ist das von den drei Halbkreisen eingeschlossene Flächenstück gleich dem Kreis, dessen Durchmesser die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks ist (s. Figur 36). Nennt man die Hypotenuse $= h$ und die Projektionen der beiden Katheten auf die Hypotenuse $= p$ resp. $q$, so ist $h = p + q$ und es mus nach der in obigem Lehrsatz enthaltenen Behauptung

$$\varrho^2\pi = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}h\right)^2\pi\right] - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}p\right)^2\pi + \left(\frac{1}{2}q\right)^2\pi\right]$$
$$\text{oder } \varrho^2 = \frac{1}{8}(h^2 - p^2 - q^2), \text{ sein.}$$

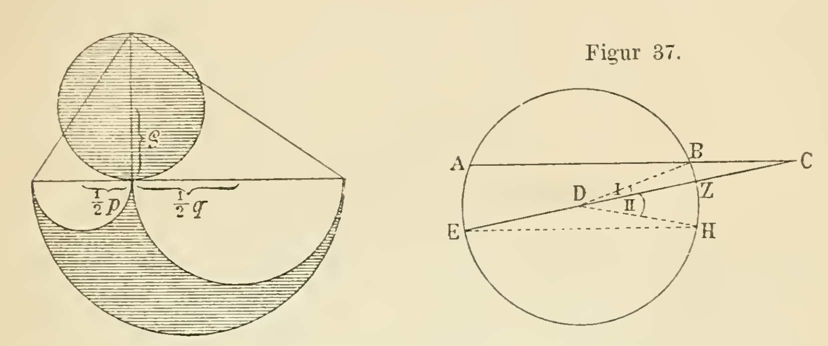
oder da $h = p + q$ also $h^2 = p^2 + 2pq + q^2$ beträgt, so ist

$$\varrho^2 = \frac{1}{8}(p^2 + 2pq + q^2 - p^2 - q^2)$$

oder $\varrho^2 = \frac{1}{4}pq$

oder $(2\varrho)^2 = pq$.

$2\varrho$ ist aber die Grösse des Höhenperpendikels im rechtwinkligen Dreieck und da nach einem planimetrischen Lehrsatz das Quadrat des Höhenperpendikels gleich ist einem Rechteck aus den Projektionen der beiden Katheten, so kann für $(2\varrho)^2 = pq$ auch $1 = 1$ gesetzt werden, und somit ist die Richtigkeit der obigen Behauptung erwiesen. — Der 8. Satz hat folgenden Inhalt: Wenn eine



Figur 36.

Figur 37.

willkürliche Sehne $AB$ Fig. 37 eines Kreises verlängert und die Verlängerung $BC$ dem Halbmesser des Kreises gleich gemacht wird, wenn hiernächst $C$ mit dem Mittelpunkt $D$ des Kreises verbunden und diese Verbindungslinie bis zum abermaligen Durchschnitt des Kreises nach $E$ verlängert wird, so ist der Bogen $AE$ das Dreifache des Bogens $BZ$. Man ziehe $EH$ parallel zu $AB$ und die Halbmesser $DB$ und $DH$. Der Parallelismus von $AB$ und $EH$ bringt $\angle C = \angle E$ hervor. Gleichschenkligkeit von Dreiecken zeigt, dass $\angle C = \angle D^I$ und $\angle E = \angle H$. Ferner $\angle D^{II} = 2\angle E = 2\angle C = 2\angle D^I$ und $\angle BDH = 3D^I$, also Bogen $BH = AE = 3BZ$.

„In seinem Werke über die Ausmessung des Kreises (de dimensione circuli) beweist Archimedes zuerst den Satz, dass die Fläche des Kreises gleich ist derjenigen eines Dreiecks, das zur Grundlinie den Umfang und zur Höhe den Radius des Kreises hat. Er zeigt nämlich, dass der Kreis grösser ist als jedes einbeschriebene und kleiner als jedes umbeschriebene Vieleck von noch so grosser Seitenzahl. Diese Methode, die Exhaustionsmethode der Alten genannt, die dann im 17. Jahrhundert in der Integralrechnung ihre höchste Ausbildung erhielt, zieht sich durch alle Beweisführungen Archimedes' mit grosser Konsequenz und gibt seiner ganzen Darstellung das Gepräge der Neuheit, so dass wir unwillkürlich versucht sind, den grossen Archimedes der Alexandrinischen Periode unter die Mathematiker der modernen Zeit zu versetzen.“ [1])

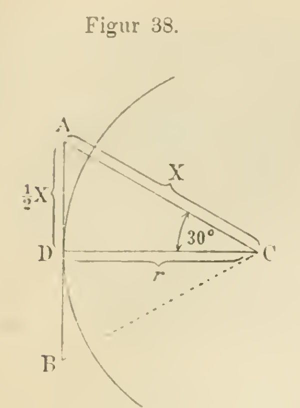
Bei der Berechnung des Verhältnisses von Umfang und Durchmesser, zu dem er dann übergeht, führt er die Teilung der Kreisperipherie vom regulären Sechseck beginnend, durch stete Halbierung bis zum regulären Sechsundneunzigeck.

---

[1]) Suter.

fort. Aus dem Halbmesser des Kreises berechnete er zunächst die Seite des um- und einbeschriebenen Sechsecks. Indem er den Mittelpunkt $C$ mit einem Berührungspunkt $D$ und der entsprechenden Ecke $A$ verband, erhielt er ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Basis der Radius $r = CD$ und dessen Senkrechte die halbe Seite $\frac{1}{2}x = AD$ des Sechsecks war. In einem solchen Dreieck ist der spitze Winkel an der Basis 30° und im Scheitel 60°, daher die Senkrechte die Hälfte der Hypotenuse, also ihr Verhältnis 1 : 2. Hieraus war nun das Verhältnis der Senkrechten $AD$ zur Basis $CD$ zu bestimmen, was mit Hilfe des pythagoräischen Satzes geschehen konnte, wonach $x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = r^2$ und $x = \frac{2r}{\sqrt{3}} = 1{,}15470\,r$; d. h. jede Seite des umschriebenen Sechsecks ist das 1,1547fache des Radius, folglich sein Gesamtumfang $6{,}92820\,r$ oder $3{,}46410\,d$ ($d$ = Durchmesser). Die Seite des einbeschriebenen Sechsecks ist aber $= 1r$, folglich der Umfang $6r$ oder $3d$. Nun halbierte er den Winkel von 30° und erhielt so die halbe Seite des umschriebenen Zwölfecks mit Hilfe des Satzes, dass in einem Dreieck, in welchem ein Winkel halbiert worden, die dem Winkel gegenüberliegende Seite durch die Halbierungslinie im Verhältnis der anliegenden Seiten geteilt wird, und mit Hilfe des pythagoräischen Satzes erhielt er auf gleiche Weise das Verhältnis der Zwölfecksseite zum Radius $= 0{,}53590\,r$ u. s. w., die in der nachstehenden Tabelle durch $u$ und $U$ bezeichneten Werte der Umfänge der Polygone für die dabei angegebene Seitenzahl $n$ für den Durchmesser $d = 1$.

Figur 38.




| $n$ | $u$ | $U$ |
|---|---|---|
| 6 | 3,000000 | 3,464102 |
| 12 | 3,105828 | 3,215390 |
| 24 | 3,132628 | 3,159660 |
| 48 | 3,139350 | 3,146086 |
| 96 | 3,141031 | 3,142715 |

Von den beiden Umfängen des in- und des um den Kreis beschriebenen Sechsundneunzigecks brauchte Archimedes nur das aithmetische Mittel zu nehmen. Dieses konnte er dann, wie er es wirklich that, dem Umfang des Kreises ohne merklichen Fehler gleichsetzen. So fand er schliesslich für das Verhältnis von Umfang und Durchmesser die beiden Grenzzahlen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, woraus das arithmetische Mittel $= 3\frac{141}{994} = 3{,}14\ldots.$, welches für praktische Aufgaben, die keine sehr grosse Genauigkeit verlangen, immer hinreichend gefunden worden ist. Es lag auch wirklich in seiner Absicht (wie sich aus Eutokios in dessen Kommentar zu Archimedes Schrift über diesen Gegenstand ergibt), nur ein der völligen Wahrheit sich näherndes Verhältnis zu finden.

Nach Archimedes machte man eine Menge Versuche, das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang schärfer anzugeben. Adrian Metius gab 1550 den Näherungswert $\frac{355}{113}$ an, der auf sechs Dezimalstellen genau ist. Vorzüglich berühmt wurde Ludolph von Ceulen (gewöhnlich von Cölln genannt) durch eine genaue Berechnung dieses Verhältnisses. Er fand gegen Ende des 16. Jahrhunderts als allgemeines Verhältnis des Durchmessers zum Umfang

$$1 : 3{,}141592\,653589\,793238\,462643\,383879\,50\ldots\ldots$$

Mittelst analytischer Kunstgriffe konnte man in den neueren Zeiten noch viel weiter gehen; dadurch setzte Shervin es bis zu 72, Machin auf 120 und Lagny bis auf 127 Dezimalstellen fort; noch später brachte Professor Richter in Elbing dasselbe Verhältnis sogar bis auf 500 Dezimalstellen heraus. Solche Bemühungen waren aber eigentlich überflüssig, weil schon das von Cöllnsche Verhältnis mehr als hinreichend ist, die grössten Kreise am Himmel von vielen Millionen Meilen mit der Genauigkeit eines Zolls auszurechnen.

Merkwürdig sind folgende, die Zahl $\pi$ betreffende Gleichungen:

die Leibnizische Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots\ldots,$$

die Reihe von Lagny:

$$\frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^7 + \ldots\ldots,$$

die Formel von Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \ldots\ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \ldots\ldots.}$$

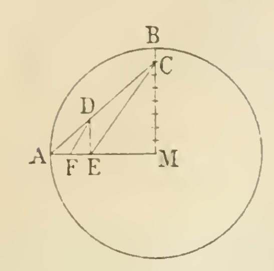
Eine absolut genaue Bestimmung des Wertes von $\pi$ ist auch mit Hilfe der höheren Mathematik nicht möglich; man erhält immer nur einen an irgend einer Stelle abgebrochenen Dezimalbruch, und es liegt also die Vermutung nahe, dass $\pi$ eine Irrationalzahl sei. Dass dies wirklich der Fall, kann aber aus den bisherigen elementaren Erörterungen nicht gefolgert werden; ein geometrischer Beweis, dass der Umfang des Kreises mit dem Durchmesser inkommensurabel sei, ist bis jetzt überhaupt nicht bekannt. Hätten die bis jetzt ausgeführten Berechnungen in den Dezimalstellen eine Periode erkennen lassen, so liesse sich der als unendlich angenommene Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandeln, also in endlicher rationaler Form darstellen; dies ist aber trotz der berechneten 500 Dezimalen nicht der Fall. Aber auch in einer geschlossenen irrationalen Form, etwa mittelst Wurzeln aus rationalen Zahlen, hat sich der Wert von $\pi$ nicht darstellen lassen. Diese Thatsachen lassen jede Aussicht darauf entschwinden, dass es gelingen könne, die der Berechnung des Kreises entsprechende geometrische Aufgabe zu lösen, welche unter dem Namen der Quadratur des Kreises eine besondere Berühmtheit erlangt hat. Nur Anfänger der Mathematik oder völlig Unerfahrene in dieser Wissenschaft ziehen jetzt noch diesem Irrlicht nach.

Der Aufgabe der Quadratur des Zirkels steht zur Seite die andere, eine Gerade zu zeichnen, welche dem Umfang eines gegebenen Kreises gleich ist, oder die Rektifikation des Kreises. Sie unterliegt derselben Schwierigkeit wie jene, und jede von beiden würde, wenn gelöst, zur Lösung der andern führen. Für die Praxis ist die Quadratur des Zirkels ohne Interesse. Die unvermeidlichen Ungenauigkeiten, welche der wirklichen Ausführung einer jeden konstruierenden Zeichnung anhaften, würden in jedem Falle das gezeichnete Quadrat in der Wirklichkeit zu einem fehlerhaften machen. Mit Hilfe der angenäherten Werte von $\pi$ lassen sich aber Konstruktionen von Quadraten angeben, die theoretisch dem gegebenen Kreise an Inhalt so nahe kommen, dass die Abweichung geringer ist als der in der Praxis unvermeidliche Fehler. Solche Näherungskonstruktionen ersetzen also, wenn die Verwandlung eines Kreises in eine gleich grosse geradlinige Figur oder die Darstellung der Länge

seines Umfangs durch eine Gerade verlangt würde, für den Praktiker vollständig die fehlenden theoretisch genauen Konstruktionen.

Als Beispiel mag folgende Näherungskonstruktion dienen, bei welcher die Peripherie durch eine Gerade dargestellt wird, aus welcher das betreffende Quadrat leicht gefunden werden kann. Man ziehe im gegebenen Kreise $M$ zwei zu einander senkrechte Radien $MA$, $MB$, teile $MB$ in acht gleiche Teile, verbinde denjenigen Teilpunkt $C$, welcher zunächst an $B$ liegt, mit $A$, trage auf $AC$ die Strecke $AD = \frac{1}{2} MB$ ab, fälle von $D$ das Lot $DE$ auf $MA$, ziehe $CE$ und darauf $DF$ parallel $CE$ bis zum Durchschnittspunkt $F$ mit $MA$; endlich zeichne man eine Strecke, gleich dem dreifachen Durchmesser des Kreises plus dem doppelten von $AF$, so ist diese Strecke näherungsweise der Peripherie gleich. Es ist nämlich $AF : AE = AD : AC$ und $AE : AM = AD : AC$, also $AF = \frac{AE \cdot AD}{AC}$ und $AE = r \cdot \frac{AD}{AC}$, mithin

Figur 39.




$$AF = r \cdot \frac{AD^2}{AC^2} = \frac{r \cdot \frac{1}{4} r^2}{r^2 + \frac{49}{64} r^2} = \frac{16}{113} r$$

und also

$$6r + 2AF = 2r \cdot 3\frac{16}{113} = \frac{355}{113} \cdot 2r.$$

Hiernach beträgt der theoretische Fehler dieser Konstruktion weniger als 0,000001 des Durchmessers, vorausgesetzt, dass die Konstruktion selbst mit einem entsprechenden Grad von Genauigkeit ausgeführt werden könnte.[1])

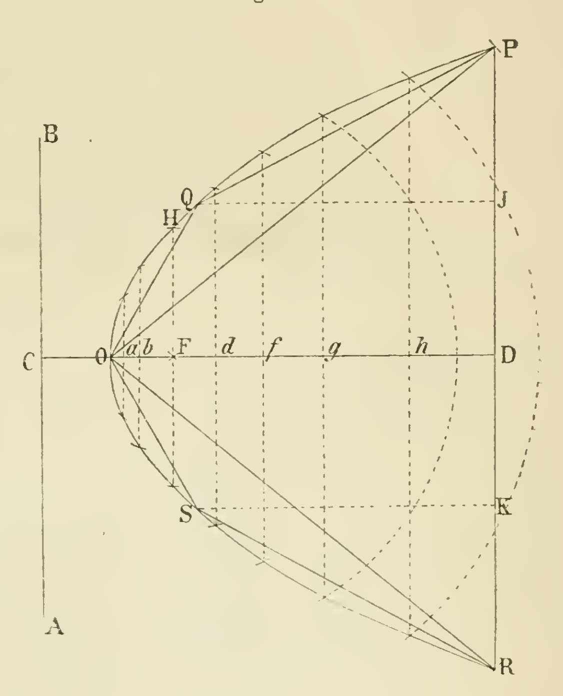
Von der Ausmessung des Kreises geht dann Archimedes auf die aus jenem entstehenden Körper, den Cylinder und die Kugel über und bestimmt deren Oberfläche und Kubikinhalt. Dieser grosse Messkünstler zeigte zuerst (in seinem Werke de Sphaera et Cylindro), dass die Oberfläche der Kugel gleich ist der krummen Seitenfläche des um sie beschriebenen Cylinders (d. h. eines Cylinders, dessen Durchmesser der Grundfläche gleich seiner Höhe, gleich dem Durchmesser der Kugel ist) oder dass sie viermal so gross ist als die Fläche eines ihrer grössten Kreise; ferner dass die Oberfläche jedes Kugelabschnitts gleich der krummen Seitenfläche eines Cylinders ist von der Höhe jenes Abschnitts und von einem dem Durchmesser der Kugel gleichen Diameter der Grundfläche, oder auch gleich der Fläche eines Kreises, welcher zum Halbmesser die von dem Pole der Kugel bis zu einem Punkte des Umfangs der Grundfläche gezogene gerade Linie hat; auch findet er die berühmte Beziehung, dass sich Cylinder, Kugel und Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe (resp. Durchmesser) dem Inhalt (erstere beiden auch der Oberfläche) nach verhalten wie 3 : 2 : 1. Archimedes hat in demselben Werk noch zwei andere die Kugel betreffende Aufgaben gestellt, welche ihn geraume Zeit beschäftigten: Eine Kugel soll durch eine Ebene derart geschnitten werden, dass Oberflächen und Körperinhalte der beiden so gebildeten Kugelabschnitte in gegebenem Verhältnis stehen. Die erste Aufgabe führt auf eine rein quadratische Gleichung, während die zweite Aufgabe nur dann lösbar ist wenn eine Länge gefunden werden kann, welche in die Proportion

[1]) Reidt.

$(a-x):b=c^2:x^2$ sich einfügt, wenn also eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3-ax^2+bc^2=0$ gefunden werden kann.

Die Quadratur der Parabel findet Archimedes auf zwei verschiedene Arten: einmal mit Hilfe der Schwerpunktsbestimmungen ebener Figuren und das anderemal. indem er durch succesives Einschreiben von Dreiecken in die jeweiligen Parabelsegmente ein Polygon erhält, dessen Grenzwert leicht zu bestimmen ist. Die Parabel ist eine Kurve mit der Eigenschaft, dass die Entfernung eines jeden ihrer Punkte von einer festen Geraden $AB$ der Direktrix oder Leitlinie gleich ist der Entfernung derselben (resp. oder beziehlichen) Punkte von einem festen Punkt $F$, welcher Brennpunkt heisst. Man kann somit eine Parabel zeichnen, indem man zu der gegebenen Achse $CD$ derselben die Senkrechte $AB$ errichtet. Alsdann halbiere man die Strecke zwischen $C$ und dem gegebenen Brennpunkte $F$ in $O$, so ist $O$ der Scheitel der Parabel. Um nun letztere selbst zu erhalten, nehme man von $O$ aus auf der Achse eine Reihe von Punkten $a$, $b$, $d$ etc. an, errichte in ihnen Senkrecchte, wie z. B. $FH$ und beschreibe mit dem Abstand $Ca$, $Cb$, $CF$, $Cd$, $Cf$ etc. aus $F$ Bögen, welche die entsprechenden Senkrechten in je 2 Punkten schneiden, so sind dies Punkte der verlangten Parabel, welche man daher noch durch eine stetige krumme Linie aus freier Hand zu verbinden hat. Errichtet man auf der Achse noch die Senkrechte $PR$, so erhält man einen Flächenraum, dessen Basis eine Gerade $PR$ und die übrige Grenzlinie eine Parabel ist. Die Basis $PR$ wird von der Achse $CD$ in zwei gleiche Teile geteilt; verbindet man den Scheitel $O$ mit den Endpunkten $P$ und $R$ der Grundlinie, so entsteht ein Dreieck $POR$, ausserhalb welchem zwei Abschnitte bleiben, von den Seiten des Dreiecks und der Parabel begrenzt. Halbiert man die Hälften der Grundlinie abermals und zieht aus den Halbierungspunkten $J$ und $K$ Parallellinien zur Achse, so werden auf der Parabel zwei neue Punkte $Q$ und $S$ bestimmt, welche, auf jeder Seite mit dem Scheitel und dem Endpunkt der Basis verbunden, zwei neue Dreiecke $OQP$ und $OSR$ erzeugen, von denen nun Archimedes beweist, dass sie zusammen den vierten Teil des ersten Dreiecks ausmachen. Diese Dreiecke lassen auf jeder Seite wieder zwei Parabelabschnitte übrig, in welche auf gleiche Weise Dreiecke einbeschrieben werden können; auch hier zeigt er, dass diese vier Dreiecke zusammen so gross sind, als der vierte Teil der beiden vorigen etc. Es werden also auch hier in die Parabel über der Grundlinie Vielecke einbeschrieben von immer doppelter Seitenzahl und jedes neue Vieleck fügt dem vorhergehenden

Figur 40.



etwas zu, was den vierten Teil der vorigen Zunahme beträgt. Nimmt man nun das erste Dreieck und die aufeinander folgenden Zunahmen, so ist klar, dass man der Fläche der Parabel um so näher kommt, je weiter man hierin geht. Archimedes lehrt daher jetzt auch, wie man die Summe einer Reihe finden kann, in welcher jedes folgende Glied den vierten Teil des vorhergehenden beträgt. Auf eine eigentümliche Weise findet er, dass wenn man bei irgend einem Glied stehen bleibt, die Summe der ganzen Reihe nebst dem dritten Teil des letzten Gliedes gleich ist $^4/_3$ des ersten Gliedes, d. h. $n + {}^1/_4 n + {}^1/_{16} n + {}^1/_{64} n + {}^1/_{256} n = {}^4/_3 n$. Das erste Glied der hier in Betracht kommenden Reihe ist nun das zuerst einbeschriebene Dreieck und dieses ist offenbar gleich der halben Fläche eines Rechtecks aus $PR \cdot OD$. Bezeichnet man diese Rechtecksfläche mit $F$, so ist das Dreieck $^1/_2 F$ und die Reihe $^1/_2 F + {}^1/_8 F + {}^1/_{32} F + {}^1/_{128} F \cdots = {}^4/_3 \cdot {}^1/_2 F = {}^2/_3 F$, d. h. der Flächeninhalt der Parabel $= {}^2/_3$ des Rechtecks aus der Sehne $PR$ und dem eingeschlossenen Achsenstück $OD$, oder $^2/_3$ des umschriebenen Parallelogramms. Archimedes weist im Laufe der Abhandlung öfters auf Elemente der Kegelschnitte zurück, woraus zu schliessen, dass er solche verfasst haben muss. Hiervon datiert denn auch die Behauptung des Mathematikers Heraklides, dass das Werk des Apollonios eine blosse Sammlung der archimedischen Erfindungen auf dem Gebiet der Kegelschnitte sei; allein der grosse Unterschied zwischen der apollonischen Behandlungsweise und der archimedischen lässt die Selbständigkeit der ersteren deutlich erkennen.

Unter dem, was Archimedes für die Geometrie des Raumes leistete, ist zu erwähnen, dass er zu den bereits von Euklid erschöpfend behandelten fünf regelmässigen Körpern 13 halbregelmässige Körper erfand, welche durch regelmässige Vielecke von mehr als nur einer Gattung begrenzt werden.

Die Kubierung der Konoide und Sphäroide ist eine der geistreichsten archimedischen Schöpfungen. Er betrachtete von diesen Körpern nur die durch Rotation um ihre Achse entstandenen, nämlich das Sphäroid (Ellipsoid), das parabolische Konoid (Paraboloid) und das hyperbolische Konoid (Hyperboloid). Müller (Beiträge zur Terminologie der griech. Mathematiker 1860) rügt die unsinnige Anwendung der Ausdrücke: Paraboloid, Hyperboloid etc., denn diese bedeuten nichts anderes als Kurven, die den Parabeln und Hyperbeln ähnlich sehen. Die archimedische Bezeichnung aber ist der Entstehung und der Form jener Körper vollständig angepasst; parabolisches Konoid bedeutet einen durch Drehung der Parabel um ihre Achse entstandenen, dem Kegel ähnlichen Körper und analog das hyperbolische Konoid; Sphäroid heisst ein Körper, der das Ansehen einer Kugel hat und entsteht, wenn Ellipsen um ihre Achsen gedreht werden; weil nur aus diesem einen Kegelschnitt ein Sphäroid entstehen kann, liess Archimedes die nähere Bezeichnung „elliptisch" weg. Zum Zwecke der Kubierung dieser Körper befolgte Archimedes den nämlichen Gang wie bei der Quadratur des Kreises und der Parabel; er schreibt in und um das Paraboloid z. B. ein System von gleich hohen Cylinderschnitten und beweist dann zuerst den Satz, dass bei ohne Ende abnehmenden Teilhöhen der Unterschied des ein- und umbeschriebenen Körpers kleiner werden kann, als jeder noch so klein angenommene Raum. Auf diesem Wege findet er die Resultate. Jeder Abschnitt eines parabolischen Konoids ist $1^1/_2$ mal so gross als ein Kegelabschnitt, welcher mit jenem einerlei Grundfläche und Achse hat. Abschnitte desselben parabolischen Konoids, welche gleiche Achsen haben, sind inhaltsgleich; ungleichachsige dagegen verhalten sich ihrem Inhalt nach wie die Quadrate ihrer Achsen. Wenn ein Sphäroid von einer durch dessen Mittelpunkt gehenden Ebene geschnitten wird, so ist jeder der beiden Abschnitte zweimal so gross als derjenige Kegelabschnitt, welcher mit jenem einerlei Grundfläche und Achse hat u. s. w. —

Archimedes gebraucht für die Kegelschnitte noch die alte, ihrer Entstehung gemässe Bezeichnung.

Sehr interessant sind seine tiefsinnigen Untersuchungen (in seiner Schrift de Spiralibus et Helicibus) über die Spirallinien (die von Konon, einem Zeitgenossen und Freund des Archimedes, nach dessen eigener Angabe erfunden worden sind) und über Schraubenlinien, mit den darauf sich gründenden praktisch-mechanischen Anwendungen. Archimedische Spirale heisst die Kurve heute noch, weil Archimedes die wichtigsten Eigenschaften derselben zuerst gefunden und bewiesen hat, und zwar gehören diese Beweise zu den schwierigsten, aber auch sinnreichsten des grossen Mathematikers. Er zeigte unter anderem, dass jeder Spiralensektor $^1/_3$ des zugehörigen Kreissektors sei; dass der Abschnitt, den die Tangente im Endpunkt der ersten Umdrehung auf der Abscissenaxe macht, gleich sei dem Umfang des zur Spirale gehörigen Kreises, dass der Abschnitt, den die Tangente im Endpunkt der zweiten Umdrehung auf der nämlichen Achse macht, gleich sei dem Umfang des zur zweiten Umdrehung der Spirale gehörenden Kreises etc. Am meisten beschäftigte er sich mit der Auffindung des Verhältnisses der Fläche der Spirale zu der des Kreises. Wenn der erzeugende Strahl $n$ Umdrehungen gemacht hat, so ist die erzeugte Fläche $\left[n(n-1)+\frac{1}{3}\right]k$, wo $k$ den Flächeninhalt des ersten Kreises bedeutet. In diesem Ausdruck ist das Gesamtresultat der Untersuchungen des Archimedes enthalten; die erste Umdrehung erzeugt die Fläche $^1/_3 k$, die zweite $^7/_3 k$, die dritte $^{19}/_3 k$, die vierte $^{37}/_3 k$ u. s. w.; folglich sind die Zunahmen $^6/_3 k$, $^{12}/_3 k$, $^{18}/_3 k \cdots$ oder $2k$, $4k$, $6k \cdots$, und die Flächen wachsen von einer Umdrehung zur andern um $2k$. Rechnet man hierzu die von ihm ausgegangene Erweiterung und Verdeutlichung des Gebrauchs der geometrischen Analysis und noch so manches andere der Welt offenbare, so liegt die Unsterblichkeit dieses ausgezeichneten Mannes unbezweifelt vor uns. Er selbst mochte wohl seine Erfindung von Kugel und Cylinder für die wichtigste halten, die er gemacht hatte, denn er wünschte, dass nach seinem Tode in sein Grabmal eine in einen Cylinder beschriebene Kugel eingegraben werden solle, und Cicero fand später, dass dieser sein Wunsch auch erfüllt worden war.

Figur 41.



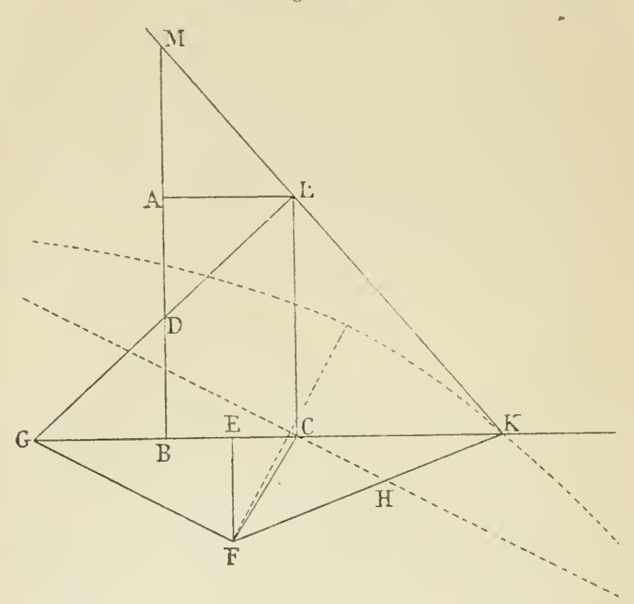
Ein Zeitgenosse des Archimedes war der Geometer Konon, der bereits erwähnte Erfinder der Spirale. Archimedes gibt ihm in der Vorrede zu seiner Quadratur der Parabel das Zeugnis eines in der Geometrie sehr bewanderten Mannes und betrauert tief seinen frühen Tod. Apollonios nennt ihn als den Verfasser einer Abhandlung über die Kegelschnitte und überdem wird er als bedeutender Astronom angeführt.

Es sei hier ein Mathematiker genannt, dessen Zeitalter nicht genau angegeben werden kann, der aber zwischen 250 und 100 v. Chr. lebte. Er heisst Nikomedes und ist der Erfinder der Muschellinie oder Konchoide, über welche er selbst mehrere sinnreiche Betrachtungen anstellte und die in der Folge auch praktische Anwendungen fand, z. B. zur Verjüngung der Säulenschäfte und zur Bildung von Fassdauben. Nikomedes bediente sich der Konchoide auch, einen geradlinigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Ihr Gebrauch zur Verdoppelung des Würfels und zur geometrischen Konstruktion bestimmter Gleichungen vom III. und IV. Grad wurde auch von dem grossen Newton mit Ehren anerkannt.

Da die Lösung des Nikomedes zu den geistreichsten gehört, welche die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels gefunden hat, und zugleich auch die Dreiteilung oder Trisektion des Winkels gibt, so mag dieselbe hier ihrem Wesen nach mitgeteilt werden.

Es seien in Figur 42 $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ die gegebenen Geraden, zu denen zwei mittlere Proportionalen gefunden werden sollen. Man vervollständige das Rechteck $ABCL$, teile $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ je in zwei gleiche Teile, ziehe $EF$ senkrecht auf die Mitte von $\overline{BC}$ und trage von $C$ aus $\overline{CF} = \overline{AD}$ ab, verbinde $F$ mit $G$, ziehe $CH$

Eigur 42.




parallel zu $FG$ und trage nun in den Winkel $HCK$ die Gerade $\overline{HK} = \overline{AD}$ so ein, dass sie verlängert durch $F$ geht. Dann ziehe man schliesslich $KLM$, so sind $\overline{AM}$ und $\overline{CK}$ die gesuchten mittleren Proportionalen; es ist $\overline{AB} : \overline{CK} = \overline{CK} : \overline{AM} = \overline{AM} : \overline{BC}$.

Beweis: Es verhält sich (da $\triangle MAL \sim \triangle LCK$)

$AM : LC = AL : CK$, oder da $LC = AB$ und $AL = BC$ ist, so ist auch

$AM : AB = BC : CK$, und da $AB = 2\,AD$ und $BC = \frac{1}{2}\,GC$ ist, so ist auch

$AM : 2\,AD = \frac{1}{2}\,GC : CK$

oder $AM : AD = GC : CK$. Es besteht aber auch die Proportion

$GC : CK = FH : HK$ (denn $CH$ ist parallel $GF$), folglich ist auch

$AM : AD = FH : HK$, oder auch

$$\underbrace{AM + AD}_{MD} : AD = \underbrace{FH + HK}_{FK} : HK.$$

Da aber nach der Voraussetzung $HK = AD$, so ist auch

a)... $MD = FK$, also auch $MD^2 = FK^2$.

Es ist nun

b) ... $BM \cdot MA + DA^2 = MD^2$,[1]) ebenso

$BK \cdot CK + CE^2 = EK^2$ oder auf jeder Seite $EF^2$ addiert

$+ EF^2 = + EF^2$

c) ... $BK \cdot CK + CE^2 + EF^2 = EK^2 + EF^2$

oder da nach dem pythagoräischen Lehrsatz $CE^2 + EF^2 = FC^2$ und $EK^2 + EF^2 = FK^2$, so ist auch, wenn diese Werte in Gleichung c) eingesetzt werden:

d) ... $BK \cdot CK + CF^2 = FK^2$. Nach Gleichung a) ist aber $FK^2 = MD^2$ und nach der Voraussetzung ist $CF = AD$, also $CF^2 = AD^2$. Diese Werte in Gleich. d) eingesetzt, ergibt

$BK \cdot CK + AD^2 = MD^2$ oder $BK \cdot CK = MD^2 - AD^2$

Nach Gleichung b) ist aber auch $BM \cdot MA = MD^2 - AD^2$

folglich $BM \cdot MA = BK \cdot CK$

e) ... oder $BM : BK = CK : MA$

Da aber $\triangle BMK \sim \triangle CLK$, so ist auch $BM : BK = CL : CK$ od. da $CL = AB$

f) ... $BM : BK = AB : CK$.

Aus Gleichung e) und f) folgt aber die Proportion

$$AB : CK = CK : MA.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $LCK$ und $AML$ hat man aber auch $CL : CK = AM : AL$ oder da $CL = AB$ und $AL = BC$, so ist auch

$$AB : CK = AM : BC.$$

Folglich ergibt sich aus dieser und der Gleichung f) die kontinuierliche Proportion

$$\overline{AB} : \overline{CK} = \overline{CK} : \overline{AM} = \overline{AM} : \overline{BC},$$

was zu beweisen war.

Die Schwierigkeit der Lösung liegt nun darin, die gegebene Länge $HK$ so in den Winkel $HCK$ einzutragen, dass sie verlängert durch den Punkt $F$ geht. Dieses erreichte nun Nikomedes mit Hilfe seiner Konchoide (Figur 43). Diese Kurve hat die Eigenschaft, dass alle Strahlen, die von ihr aus nach einem festen Punkt der senkrechten $Y$-Achse gezogen werden, durch die wagerechte $X$-Achse so geschnitten werden, dass die Abschnitte zwischen letzterer und der Kurve einander gleich sind, also $AB = p_1x_1 = p_2x_2 = p_3x_3$. Es ist nun leicht einzusehen, wie sie bei der Lösung obiger Aufgabe angewandt wird. Es sei $p_1Ex_1$ der gegebene Winkel, dem die Strecke $AB$ so einbeschrieben werden soll, dass sie verlängert durch den Punkt $P$ geht. Man nehme den einen

[1]) Es lässt sich leicht beweisen, dass $BM \cdot AM + AD^2 = MD^2$ ist. Bezeichnet man z. B. die ganze Linie oder Strecke $BM$ mit $t$ und ihre einzelnen Abschnitte oder Teile in der in Figur 45 angedeuteten Weise, so muss, da $BM = t$, $AM = x$, $AD = y$ und $MD = x + y$ ist, nach obiger Gleichung b)

$$t \cdot x + y^2 = (x + y)^2 \text{ sein.}$$

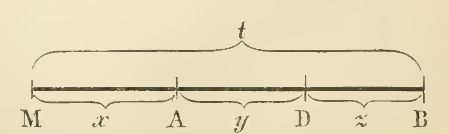
Es ist aber $t = x + y + z$ oder da $y = z$, so ist auch $t = x + 2y$ und somit kann man für die Gleichung b) auch setzen:

$$(x + 2y) \cdot x + y^2 = (x + y)^2$$

oder $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

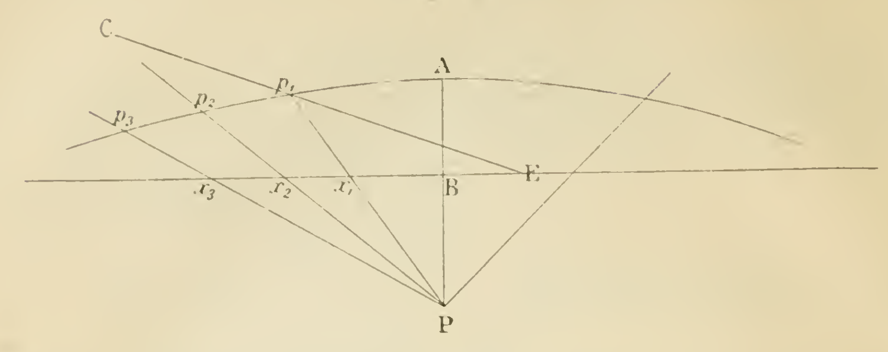
oder $1 = 1$, wodurch die Richtigkeit der Gleichung b) bewiesen ist.

Figur 45.



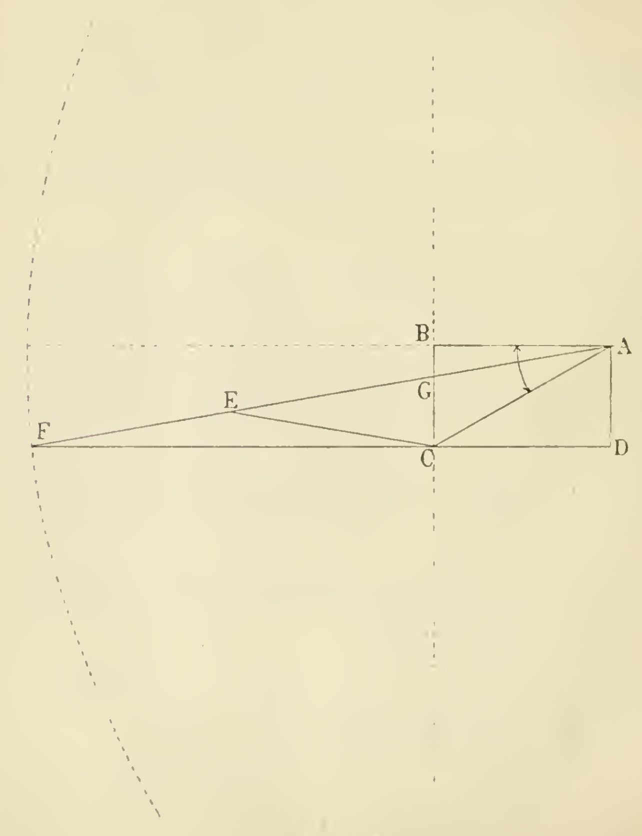
Schenkel $Ex_1$ als $x$-Achse an und beschreibe über demselben mit dem Pol $P$ und dem Parameter $AB$ die Konchoide $Ap_1p_2p_3\ldots$ Der Durchschnitt derselben

Figur 43.




mit dem andern Schenkel bestimmt uns die Gerade $p_1P$, deren Abschnitt $p_1x_1$ den gestellten Forderungen genügt.

Figur 44.

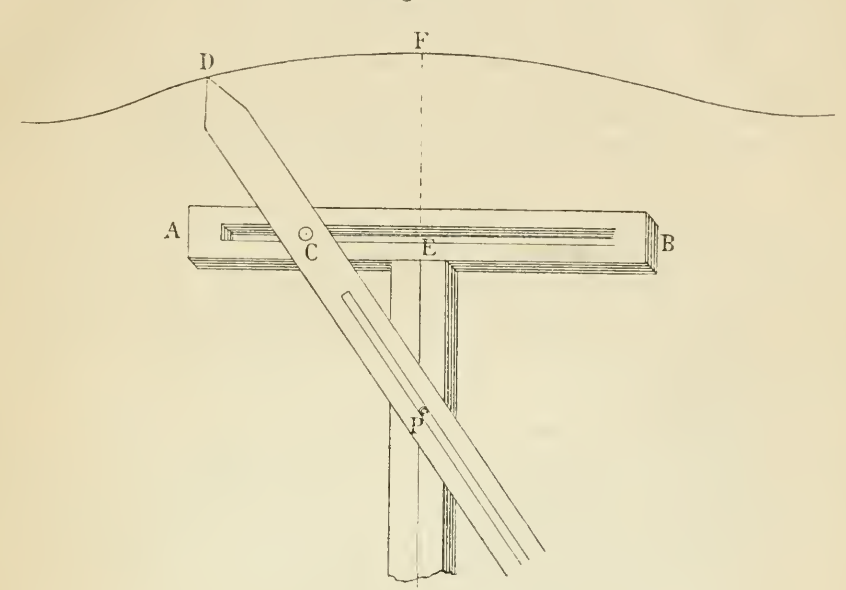



Ebensoschön löst die Konchoide das Problem der Dreiteilung des Winkels. Es sei in Figur 44 $BAC$ der zu teilende Winkel. Man vervollständige das

Parallelogramm $ABCD$ und verlängere die Seite $CD$ unbestimmt, so ist leicht einzusehen, dass die Aufgabe gelöst ist, wenn es gelingt, $AGF$ so zu ziehen, dass die Strecke $GF = 2AC$ wird. Denn dann ist $\angle AFC$ oder $\angle BAG = \frac{1}{3} \angle BAC$. Dies erreicht man aber mittels der Konchoide über der Achse $BC$, mit dem Pol $A$ und dem Parameter $2AC$.

Diese Konchoide konstruierte Nikomedes mittels des unten verzeichneten Instrumentes.[1]) $AB$ ist die Achse desselben, $P$ der feste Punkt oder Pol und $CD = EF$ die konstante Strecke oder der Parameter. Der Punkt $D$ beschreibt in stetiger Bewegung die Konchoide.

Figur 46.




Auf Archimedes folgte bald ein nicht weniger bedeutender Geometer, der, wenn er seine berühmten Vorgänger auch nicht verdunkelte, ihnen doch mit Recht gleichgestellt wird. Apollonios, der „grosse Geometer“, wie ihn das Altertum nannte, wurde 247 v. Chr. zu Perga in Pamphilien geboren. Er machte seine Studien in Alexandrien unter den Schülern Euklids; seine Blütezeit fällt in die Regierung des Ptolomäos Philopator ums Jahr 200 v. Chr. Wenn auch der grösste Teil von Apollonios Werken über höhere Geometrie verloren gegangen ist, so ist doch das Hauptwerk desselben über Kegelschnitte beinahe noch ganz vollständig vorhanden; nämlich von acht Büchern dieses Werkes besitzen wir noch die ersten sieben. Aber nur die vier ersten sind in der Originalsprache, der griechischen, zu uns gekommen; die drei folgenden in einer Uebersetzung, die ums Jahr 1250 arabisch und um die Mitte des 17. Jahrhunderts lateinisch erschien.

Ueber diese Arbeit spricht sich Apollonios selbst in einer Zuschrift an Eudemos kurz aus, was in Beziehung auf den Anteil, welchen er sich selbst zuspricht, nicht unwichtig ist. Er erwähnt hier, dass sein Werk aus acht Büchern bestehe, von welchen die ersten vier die Elemente enthielten, die vier andern aber der höheren Wissenschaft angehörten. „Das erste Buch, schreibt er, ent-

[1]) Aus Suter, Geschichte der Mathematik.

hält die Erzeugung der Kegelschnitte und die Darstellung ihrer vorzüglichsten Eigenschaften; dieses alles ist von mir in grösserem Umfang und allgemeiner ausgearbeitet worden, als es von den anderen, die über die Sache geschrieben haben, geschehen ist. Das zweite Buch behandelt die Sätze über die Achsen und die Durchmesser der Kegelschnitte, sowie die Asymptoten der Hyperbel (d. h. der Linien, welche den Hyperbelästen sich mehr und mehr nähern, ohne mit denselben zusammenzutreffen). Das dritte Buch enthält viele und merkwürdige Theoreme, welche sich nützlich erweisen werden bei der Lösung bestimmter Aufgaben, wie auch bei solchen, welche auf geometrische Oerter führen; von diesen sind die meisten sehr schön und neu. Das vierte Buch enthält die Verbindungen der Kegelschnitte unter sich, auf wieviele Weisen sie unter sich oder mit dem Kreise zusammentreffen können, und auch noch vieles andere, worüber von meinen Vorgängern nichts auf uns gekommen ist. Das fünfte Buch behandelt ausführlich die Lehre vom Grössten und Kleinsten. Das sechste Buch enthält die Gleichheit und Aehnlichkeit der Kegelschnitte. In dem siebenten Buche finden sich Theoreme, welche bestimmten Aufgaben über die Kegelschnitte zur Grundlage dienen können; und das achte Buch ist solchen bestimmten Aufgaben über Kegelschnitte gewidmet.“ [1])

„Wie des Euklides Elemente, so haben des Apollonios Kegelschnitte ihres Verfassers Namen für alle Zeiten neben die der grössten Geometer gestellt. Dieses Werk setzte der Entwickelung der griechischen Geometrie die Krone auf; es enthält die letzte und höchste Stufe des geometrischen Wissens der Alten. Was nach Apollonios geleistet wurde, waren nur die unmittelbaren Ausflüsse seiner eigenen Schöpfung; sein Genius hielt gleichsam die Flügel der kommenden Geister gefesselt, sie vermochten sich nicht zu höherer Vollkommenheit emporzuschwingen.“ [2])

Vor Apollonios hatte man die Kegelschnitte nur in senkrechten Kegeln betrachtet. Apollonios aber untersuchte sie in jedem Kegel, dessen Grundfläche eine Kreisfläche ist; er bereicherte nicht bloss die Erfindungen seiner Vorgänger mit neuen Ansichten, sondern brachte auch selbst viele ganz neue Sätze zum Vorschein.

Von Heraklides wurde Apollonios eines gelehrten Diebstahls beschuldigt, indem ersterer behauptete, er selbst habe über Kegelschnitte geschrieben, und sein Werk wäre es eben, welches unter Apollonios Namen ans Licht gekommen wäre. Dass diese Beschuldigung falsch war, haben in neuerer Zeit mehrere gelehrte Männer (z. B. Weidler) zu beweisen gesucht. Die apollonische Behandlungsweise kennzeichnet sich hauptsächlich durch drei Vorzüge: durch die ausgezeichnete systematische Anordnung des Stoffes, durch die konsequente Festhaltung des einen Gesichtspunktes, von dem aus das Ganze aufgefasst ist, und durch die Anwendung der analytischen Methode. Apollonios betrachtet die Grundeigenschaften der Kegelschnitte in Verbindung mit dem Kegel selbst.

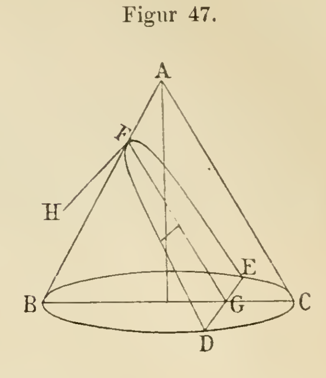
Der Hauptsatz, auf den sich die ganze Behandlungsweise der Kegelschnitte stützt, ist die Beziehung zwischen Ordinate, Abscisse und Parameter. Dass die apollonische Theorie der Kegelschnitte vom Kegel selbst unzertrennlich ist, beweist die Definition des Parameters [3]) am besten. Diese Linie $FH$, deren Länge durch gewisse geometrische Methoden bestimmt wird, im Scheitel des Kegelschnitts ($F$) senkrecht zur Achse $FG$ errichtet, verhält sich zur Entfernung des Kegelschnittscheitels von der Spitze des Kegels $AF$, wie das Quadrat der Grundlinie $BC$ desjenigen Dreiecks, das durch die Spitze des Kegels und die Achse des Kegelschnitts gelegt ist, zum Rechteck aus den beiden übrigen Seiten $AB$ und $AC$ dieses Dreiecks. $FH : FA = BC^2 : AC \cdot AB$. Apollonios

---

[1]) Arneth. — [2]) Suter. — [3]) Unter dem Parameter versteht man die im Brennpunkt $F$ (siehe Figur 40, Seite 59) auf der Achse senkrecht stehende Sehne.

nennt dann denjenigen Kegelschnitt, bei welchem das Quadrat der Ordinate gleich ist dem Produkt aus Abscisse und Parameter, Parabel, und von dieser Beziehung ausgehend, den Kegelschnitt, bei dem jenes Quadrat der Ordinate etwas kleiner als das Produkt aus Abscisse und Parameter, Ellipse, dagegen denjenigen, bei welchem jenes Quadrat grösser ist als das Produkt, Hyperbel.

Figur 47.



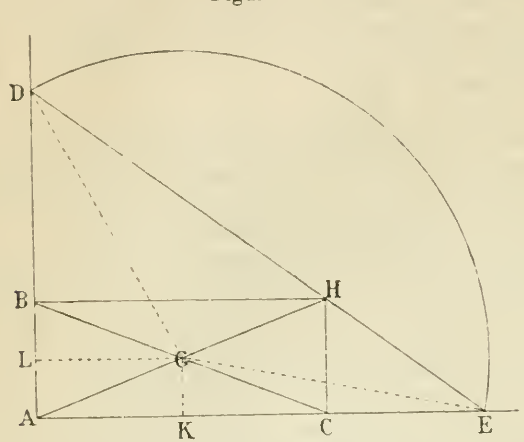

Dass diese Benennungen unserer analytischen Beziehungsweise der Kegelschnitte analog gebildet sind, zeigt schon den Einfluss der analytischen Methode, die sich in den Werken des Apollonios mehr als bei irgend einem Geometer des Altertums offenbart. Am schönsten tritt dieselbe im fünften Buche hervor, in welchem zum erstenmal Untersuchungen über das Grösste und Kleinste erscheinen. Wir finden hier alles wieder, was uns die heutigen analytischen Methoden über diesen Gegenstand lehren und erkennen darin zugleich den ersten Keim der höchst scharfsinnigen und tiefgehenden Theorie von den Evoluten, die in der neueren Geometrie vornehmlich durch Huyghens, Jakob Bernoullis und Eulers Untersuchungen zu einer grossen Vollkommenheit gebracht und auf vorschiedene Weise praktisch angewendet worden ist.

In dem dritten Buche bilden die ersten 44 Sätze einen besonderen Abschnitt, dessen Charakter schon im 1. Satz sich dahin ausweist, dass hier Verhältnisse von Produkten aus Tangenten und Sekanten der Kegelschnitte auftreten. „Im 45. Satz kommt Apollonius auf die Brennpunkte; er nimmt in der grossen Achse einen Punkt von der Beschaffenheit, dass das Rechteck aus den Abschnitten der Achse gleich ist dem Rechtecke aus der halben grossen Achse und dem halben Parameter, d. h. gleich dem Quadrate der halben kleinen Achse, ebenso auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunktes. Die Sätze 45—52 enthalten nun einige der Eigenschaften der Brennpunkte, z. B. der 48. Satz enthält, dass die Radien von den Brennpunkten nach einem Punkte des Umfanges gezogen, daselbst mit der Tangente an diesem Punkte gleiche Winkel bilden, und der 52. Satz, dass diese beiden Radien bei der Ellipse zusammen der grossen Achse gleich sind. Die Brennpunkte sind die merkwürdigsten Punkte der Kegelschnitte, sie treten aber bei den Griechen gerade am wenigsten hervor. Wenn man die halbe grosse Achse als Hypotenuse und die halbe kleine Achse als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks betrachtet, und zu beiden die andere Kathete sucht und mit dieser als Radius aus dem Mittelpunkt der Ellipse einen Kreis beschreibt, so gibt dieser zwei Durchschnittspunkte auf der grossen Achse, welche die Brennpunkte sind. Der 52. Satz enthält nun die charakteristische Eigenschaft der Ellipse, nach welcher ein jeder Punkt derselben der Durchschnittspunkt zweier Kreise ist, welche aus den Brennpunkten als Mittelpunkte mit Radien beschrieben werden, deren Summe gleich der grossen Achse ist. Die Gerade, welche aus einem Brennpunkte nach dem Umfange gezogen wird, heisst ein Radiusvektor. Auf dem 48. Satz beruht die Eigenschaft der Ellipse, welcher die Brennpunkte ihren Namen verdanken; wenn nämlich ein Schall-, Licht- oder Wärmestrahl von dem einen Brennpunkte ausgeht, so wird er an der Stelle der Kurve, welche er erreicht, unter demselben Winkel zurückgeworfen und gelangt dadurch in den andern Brennpunkt, in welchem daher die Strahlen gesammelt werden und hier den ursprünglichen Effekt wieder hervorbringen. Die Hyperbel hat ähnliche Eigenschaften: man

beschreibt aus dem Mittelpunkte mit einem Radius, welcher gleich ist der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, wovon die halben Achsen die Katheten sind, einen Kreis, der die Achse in den Brennpunkten durchschneidet. Jeder Punkt der Hyperbel ist der Durchschnitt zweier aus den Brennpunkten beschriebenen Kreise, von der Beschaffenheit, dass der Unterschied ihrer Radien gleich ist der grossen Achse. Die Parabel hat die Eigenschaft, dass irgend ein Punkt in ihr ebensoweit vom Brennpunkt entfernt ist, wie von einer auf der Achse senkrechten Geraden.“ [1])

Apollonios hat sich auch mit dem Problem der Verdoppelung des Würfels beschäftigt und eine geometrische Lösung desselben gegeben, die uns Eutokios überliefert hat. Es seien $AB$ und $AC$ die beiden gegebenen Geraden, zu denen die mittleren Proportionalen bestimmt werden sollen. Man konstruiere das Rechteck $CABH$, halbiere die Diagonale $AH$, verlängere $AB$ und $AC$ und beschreibe von $G$ aus einen Kreis, der die verlängerten Geraden $AB$ und $AC$ so schneidet, dass die Durchschnittspunkte $D$ und $E$ mit $H$ in einer Geraden liegen, dann sind $DB$ und $CE$ die gesuchten mittleren Proportionalen. Man ziehe noch die Diagonale $BC$, die Radien $GD$ und $GE$ und die Senkrechten $GK$ und $GL$ auf $AC$ und $AB$. Es ist nun $AE \cdot CE + KC^2 = KE^2$, was man leicht sieht, wenn man die Strecke $AE$ in $AC$ und $CE$ auflöst. Addiert man auf beiden Seiten $GK^2$, so erhält man $AE \cdot CE + GC^2 = GE^2$. Ebenso ist $AD \cdot DB + BG^2 = GD^2$. Da nun $GC = BG$ und $GE = GD$ ist, so ist auch $AE \cdot CE = AB \cdot BD$ oder es besteht die Proportion $AE : AD = BD : CE$. Man hat aber auch $AE : AD = CE : CH = BH : BD$. Hieraus folgt die kontinuierliche Proportion $BH : BD = BD : CE = CE : CH$ oder $AC : BD = BD : CE = CE : AB$, was zu beweisen war. [2])

Figur 48.




Der Apollonische Satz, welcher in die planimetrischen Lehrbücher aufgenommen ist, lautet: Beschreibt man durch die beiden Teilpunkte einer harmonisch geteilten Strecke einen Halbkreis, so haben die Entfernungen aller Punkte dieses Halbkreises von den beiden Endpunkten der Strecke zu einander dasselbe Verhältnis, nämlich das der harmonischen Teilung. Voraussetzung: $AC : BC = AD : BD$; $X$ ein beliebiger Punkt des über $CD$ beschriebenen Halbkreises. Behauptung: $XA : XB = CA : CB$. Beweis: Man ziehe $XD$ und errichte $EF$ in $C$ senkrecht auf $XC$, so ist $CXD$ ein rechter Winkel als Winkel im Halbkreis, daher $EF$ parallel $XD$. Könnte man beweisen, dass $\angle u = \angle v$ wäre, so wäre $XC$ die Halbierungslinie des $\angle AXB$, diese teilt die Gegenseite $AB$ im Verhältnis der beiden anliegenden Dreiecksseiten $XA$

Figur 49.

[1]) Arneth. — [2]) Nach Suter.

und $XB$, es wäre also dann wirklich $XA:XB = CA:CB$. Im Dreieck $ADX$ mit der Parallelen $CE$ ist $CE:DX = CA:DA$; im Dreieck $BDX$ mit der äusseren Parallelen $CF$ ist $CF:DX = CB:DB$. Aber $CA:DA = CB:DB$, wenn man in der Voraussetzung die inneren Glieder vertauscht. Folglich $CE:DX = CF:DX$, d. h. $CE = CF$. Mithin ist $CX$ die Mittelsenkrechte auf $EF$ und $\llcorner u = \llcorner v$, somit $XA:XB = CA:CB$.

Das Werk des Apollonios hat bei den Griechen eine grosse Anzahl von Kommentatoren gefunden, von denen die berühmtesten Hypatia, Eutokios und Pappos sind. Später haben dann die Araber das Werk des Apollonios vielfach übersetzt.

Bis in die Mitte des 17. Jahrhunderts waren nur die vier ersten Bücher des Apollonios bekannt und die übrigen verloren geglaubt, bis Golius und Borelli, der erstere im Orient, der letztere in der medicäischen Bibliothek zu Florenz die arabischen Manuskripte des 5., 6. und 7. Buches fanden, deren Uebersetzung durch den Orientalisten Abraham Ecchellensis mit Noten von Borelli im Jahr 1661 zu Florenz erschien. Schon vorher hatte der berühmte italienische Mathematiker Viviani versucht, das 5. Buch der Kegelschnitte nach der noch erhaltenen Inhaltsausgabe wiederherzustellen. Er veröffentlichte diese ausgezeichnete Arbeit unter dem Titel: Divinatio in quintum Apollonii conicorum librum 1659. Durch Viviani angeregt, unternahm der berühmte Engländer Halley die Ergänzung des grossen Werkes, indem er das wahrscheinlich für immer verlorene 8. Buch nach den Angaben des Pappos über dasselbe und im rechten Geist der apollonischen Methode wiederherstellte. Im Jahre 1710 gab dann Halley den ganzen Apollonios in 8 Büchern heraus, die beste der vielen bis jetzt erschienenen Ausgaben.

Von den übrigen zahlreichen geometrischen Schriften des Apollonios ist uns nur diejenige „über die Teilung des Verhältnisses“ erhalten geblieben. Halley hat dieselbe 1708 lateinisch publiziert. In derselben ist folgende Aufgabe in allen ihren verschiedenen Fällen behandelt: „Von einem ausserhalb zweier der Lage nach gegebenen geraden Linien in der durch dieselben bestimmten Ebene liegenden Punkte eine gerade Linie zu ziehen, so dass die zwischen ihren Durchschnittspunkten mit jenen Linien und zweien in denselben gegebenen Punkten liegenden Segmente ein gegebenes Verhältnis zu einander haben.“

Die Berührungsaufgabe oder das Taktionsproblem des Apollonios umfasst 10 spezielle Aufgaben, welche in dem verlorengegangenen Werke περὶ ἐπαφῶν desselben enthalten waren. Bezeichnet man mit $P$, $L$, $K$ gegebene Punkte, gerade Linien und Kreise, so soll man einen Kreis konstruieren, der durch drei solche Elemente bestimmt wird und zwar so, dass er die gegebenen Geraden oder Kreise berührt oder durch die gegebenen Punkte geht. Demnach sind zehn Kombinationen möglich. Bei der Lösung derselben unterscheidet man die ältere und die neuere Methode. Die ältere war auch die des Apollonios und wurde zuerst wieder angewendet durch den holländischen Mathematiker Vieta († 1603). Sie löst die speziellen Aufgaben der Reihe nach, reduziert die späteren auf die früheren und wendet nur Hilfsmittel an, die bereits den alten Griechen bekannt waren. Die neuere Methode setzt die Eigenschaften der Polaren, Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsachsen voraus, löst direkt das allgemeine Problem: einen Kreis zu konstruieren, welcher drei gegebene Kreise berührt, und leitet daraus die Lösungen der übrigen Aufgaben als besondere Fälle ab.

Die meisten der 10 Taktionsaufgaben gestatten mehrere Lösungen und umfassen mehrere Fälle, je nachdem die Berührung der Kreise eine äussere oder innere ist, und je nachdem man die verschiedene Lage, bei den Kreisen auch die Grösse der gegebenen Elemente in Betracht zieht. Die beiden nachstehenden sind jedenfalls allbekannt und fehlen in keinem geometrischen Lehrbuche: 1. Einen Kreis zu konstruieren, welcher durch drei gegebene Punkte,

z. B. durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks geht. 2. Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Gerade, z. B. die drei Seiten eines Dreiecks berührt.[1])

Unter den übrigen Schriften, von deren Inhalt gar keine nähere Anzeige vorhanden ist, war eine über die Vergleichung des Dodekaedron und Ikosaedron, die in derselben Kugel einbeschrieben sind.

Die meisten seiner verlorengegangenen Abhandlungen sind von verschiedenen neueren Mathematikern nach den durch Pappos uns erhalten gebliebenen Inhaltsverzeichnissen wiederhergestellt worden, und alle diese Anstrengungen der ausgezeichnetsten Mathematiker neuerer Zeit bilden den schönsten Beweis für die hohe Achtung, die der grosse Geometer beim Wiederaufleben der Wissenschaften genoss. Mit Apollonios hatte der geometrische Geist unter den Alten seinen Höhepunkt erreicht. Die folgenden Zeiten mussten sich begnügen, die Werke der grossen Meister zu studieren und einiges als Nachlese beizufügen.

Heron von Alexandrien[2]) ist nicht allein berühmt durch verschiedene mechanische Erfindungen, sondern leistete auch Ausgezeichnetes in der praktischen Geometrie. In einem Buche über angewandte Mechanik behandelte er die Anfertigung von Geschützen. Er lehrt, dass, wenn eine dreifach stärkere Kraft erzielt werden soll, die den Geschossen ihre Bewegung erteilende Sehne dreifach stärkere Spannung erleiden muss. Diese ihr zu verschaffen, während die ganze Gestalt des Geschützes sich ähnlich bleibt, muss ein gewisser cylindrischer Teil desselben unter der gleichen geometrischen Bedingung, die für das Ganze gilt, dreimal grösser werden. Nun verhalten sich ähnliche Cylinder wie die Kuben ihrer Durchmesser, also muss hier sich verhalten $d^3 : D^3 = 1 : 3$. Das ist die delische Aufgabe der Würfelverdoppelung in verallgemeinerter Form. Heron löste die Aufgabe (nach Cantors Angabe) in derselben Weise wie Apollonios (s. d.). Von den Werken des Heron, welche sich speziell auf Geometrie beziehen, sind nur zwei übersetzt und veröffentlicht. Das Buch der Geometrie enthält nebst einer Reihe von Definitionen verschiedener Materien und einer Masstabelle die Berechnung von Quadraten und Rechtecken, deren Fläche und deren Diagonale gesucht wird. Beim rechtwinkligen Dreieck werden die Methoden des Pythagoras und des Platon zur Auffindung rationaler Seitenlängen gelehrt. Weiter werden Parallelogramme, rechtwinklige Trapeze und beliebige Vierecke der Berechnung unterzogen. Dann wendet sich Heron zum Kreise und leitet Durchmesser, Umfang und Inhalt gegenseitig auseinander ab, ermittelt die Fläche eines Kreisabschnitts und die Länge seines Bogens aus der Sehne und Höhe des Abschnitts und berechnet auch den Ring zwischen zwei konzentrischen Kreisen. $\pi$ wird dabei am häufigsten zu $^{22}/_7$ angenommen. Weiter gibt Heron Formeln, mit deren Hilfe man die Flächen regelmässiger Vielecke, vom Fünfeck bis zum Zwölfeck aus der Seitenlänge finden kann. In der sogen. Stereometrie bilden die Rauminhalte von geometrischen Körpern und Körperoberflächen, sowie dem praktischen Leben angehörige Körperformen, als Schalen, Amphitheater, Speisesäle, Brunnen etc. den Gegenstand der Berechnung. Die Höhe einer Säule wird aus ihrem Schatten berechnet nach der Proportion Stabschatten : Säulenschatten = Stab : Säule. Die Pyramide wird dem dritten Teil des Prisma von derselben Grundfläche und Höhe gleichgerechnet. Das zweite Werk, welches den Namen „Dioptrica" trägt, ist eine Behandlung der Geodäsie, worin sich, mit Hilfe eines von den Alten

[1]) Wer sich eingehender mit dem Berührungsproblem des Apollonius beschäftigen will, dem sei das Lehrbuch der Planimetrie von Dr. Adolph Kleyer empfohlen, in welchem eine ausführliche Behandlung sämtlicher Fälle enthalten ist.

[2]) Lebte nach Chasles Angaben um 215 v. Chr., während Cantor dessen Blütezeit um 100 v. Chr. annimmt.

Dioptra genannten Instruments, eine Menge von Aufgaben aus der praktischen Geometrie graphisch aufgelöst finden.

„Dieses Werk ist ein kostbares Denkmal der griechischen Geometrie und füllt eine Lücke aus, die sich in den auf uns gekommenen Schriften des Altertums findet. Denn da die Alten stets unter dem Namen Geodäsie die praktische Geometrie von der theoretischen Geometrie unterschieden, so mussten sie über diese Geodäsie besonders schreiben; aus der Schule zu Alexandrien ist aber nichts über diesen Teil der Geometrie auf uns gekommen.“ Cantor ist der Meinung, dass Heron ein offizielles Lehrbuch der Feldmessung verfasst hat, geeignet, die alten Vorschriften zu verdrängen und neben sie bessere, genauere, aber immer noch der Berechnung leichte Bahnen eröffnende Regeln zu stellen. „Es gab Feldmesser Jahrtausende vor Heron. Sie müssen gewisse Vorschriften, wie man zu verfahren habe, unter sich vererbt haben und ihr Erbe muss auf Heron gelangt sein.“

Es mögen einige Aufgaben aus der Dioptrica folgen, die sich mit Hilfe der Dioptra gelöst vorfinden, da dieselben das kennen lehren, was die praktische Geometrie bei den Griechen ausmachte: 1. Den Unterschied der Höhe zweier, gegenseitig nicht sichtbarer Punkte zu messen. — 2. Eine gerade Linie zwischen zwei solchen Punkten zu ziehen. — 3. Die Breite eines Flusses, den man nicht überschreiten kann, zu messen. — 4. Die Entfernung zwischen zwei entfernten Punkten zu messen. — 5. Von einem gegebenen Punkt ein Lot auf eine Gerade zu fällen, zu der man nicht kommen kann. — 6. Die Höhe eines unzugänglichen Punktes zu messen. — 7. Den Höhenunterschied zweier unzugänglichen Punkte zu messen. — 8. Ein Feld zu messen, ohne hineinzugehen. — 9. Dasselbe in gegebene Teile zu teilen, durch Gerade, die von einem Punkt ausgehen. — 10. Ein Dreieck und ein Trapez nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen.

Die Dioptra bestand aus einem vier Ellen langen Lineal, welches an beiden Enden Plättchen zum Hindurchvisieren oder wie man heute sagt, Diopter-vorrichtungen trug. Sie ruhte auf einer kreisrunden Scheibe, auf welcher sie in Drehung versetzt werden konnte, und eine vertikale Drehung war mit der Scheibe auf einem die ganze Vorrichtung tragenden Fusse ermöglicht.

Ein Paragraph der Schrift über die Dioptra liefert den Beweis für die sogenannte heronische Dreiecksformel. Das Dreieck $abc$ erweist sich bei Einschreibung des Kreises mit dem Halbmesser $od$ als gleich dem Doppelten eines Dreiecks mit diesem Halbmesser, als Höhe und dem halben Umfang von $abc$ oder mit $cf$ als Grundlinie, sofern $bf = ag$ genommen ist. Nun wird die Hilfskonstruktion $om$ senkrecht zu $co$, $bm$ senkrecht zu $bc$ und $cm$ vollzogen, nebst den Halbmessern $og$, $od$, $or$ des einbeschriebenen Kreises und den Verbindungsgeraden $oa$, $ob$, $oc$ seines Mittelpunkts mit den Endpunkten des Dreiecks. Weil Winkel $com = cmb = 90^0$, muss $cm$ der Durchmesser des umschriebenen Kreises für die beiden Dreiecke $com$ und $cbm$ sein, d. h. $cobm$ ist ein Sehnenviereck und Winkel

Figur 50.

$cob + \angle cmb = 180^0$. Aber $\angle cob = \angle cod + \angle dob = \frac{1}{2}\angle rod + \frac{1}{2}\angle dog$ und addiert man dazu noch $\angle aog = \frac{1}{2}\angle gor$ und berücksichtigt $\angle rod + \angle dog + \angle gor = 360^0$, so zeigt sich auch $\angle cob + \angle aog = 180^0$, folglich $\angle cmb = \angle aog$; ferner $\angle cbm = 90^0 = \angle ago$, folglich sind die Dreiecke $bcm$ und $gao$ ähnlich, und $bc:bm = ga:go$ oder was dasselbe ist $bf:od$, somit $\frac{bc}{bf} = \frac{bm}{od}$. Aber aus der leicht ersichtlichen Aehnlickeit der Dreiecke $bmx$ und $odx$ folgt auch $\frac{bm}{od} = \frac{bx}{dx}$, mithin $\frac{bc}{bf} = \frac{bx}{dx}$. Durch Addition der Einheit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens folgt $\frac{cf}{bf} = \frac{db}{dx}$ oder $\frac{cf^2}{cf \cdot bf} = \frac{cd \cdot bd}{cd \cdot dx}$ oder $\frac{cf^2}{cf \cdot bf} = \frac{cd \cdot bd}{do^2}$ und daraus $(cf \cdot od)^2 = cf \cdot bf \cdot cd \cdot bd$. Nun war der Flächeninhalt des Dreiecks $abc$ (als des Doppelten des Dreiecks $cof$) $= 2 \cdot \frac{cf \cdot od}{2} = cf \cdot od$ und somit ist, wenn man die Fläche des Dreiecks $abc$ durch $\triangle$ bezeichnet, $\triangle = \sqrt{cf \cdot bf \cdot cd \cdot bd}$. Setzt man endlich $ab = \alpha$, $bc = \beta$, $ca = \gamma$, so lassen die Faktoren unter dem Wurzelzeichen sich leicht anders ordnen und schreiben, so dass $\triangle = \sqrt{\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \cdot \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2}}$ entsteht, eben die Formel, die Herons Namen führt. Ob sie ihm angehört, d. h. ob Heron hier eine eigene oder fremde Erfindung mitteilt, ist nicht vollständig festgestellt. „Die Form von Herons Schriften ist vollkommen ägyptisch, und manches liest sich geradezu wie eine Uebersetzung ähnlicher Dinge aus dem Rechenbuch des Ahmes.“ [1])

In dem nun folgenden Zeitraum bis auf Ptolemäos nennen uns die kulturgeschichtlichen Annalen eine grosse Reihe von Namen griechischer Mathematiker, aber auch nicht viel mehr als die Namen; ihre wissenschaftlichen Leistungen sind nur gering und tragen mit wenig Ausnahmen den Stempel des allmählichen Verfalles griechischer Bildung an sich. Das römische Wesen, das damals schon anfing, umgestaltend einzuwirken auf das hellenische Staats- und Geistesleben, verfehlte auch nicht, seinen Einfluss auf die Behandlungsweise der Mathematik merkbar zu machen; diese verlor immer mehr den Charakter einer rein theoretischen, selbständigen Wissenschaft; das philosophisch-spekulative Interesse, das sie bis jetzt geleitet hatte, musste den praktischen Bedürfnissen des kriegerischen Römers weichen. [2])

Ums Jahr 100 v. Chr. lebte der Mathematiker Geminos von Rhodos, einer der bedeutendsten mathematischen Schriftsteller jener Zeit. Sein geometrisches Werk, das verlorengegangen, war eine Darstellung der geschichtlichen Entwickelung der Spirallinien, Konchoide, Kissoide und anderer Kurven. Etwas später als Geminos lebte der Mechaniker Philon, als Geometer bekannt durch seine Lösung des Problems der Verdoppelung des Würfels, die uns Eutokios aufbewahrt hat. Dieselbe ist im Prinzip die nämliche wie die des Apollonios. Von Dionysidoros ist uns durch Eutokios eine Lösung des Problems, eine Kugel durch eine Ebene nach gegebenem Verhältnis zu teilen, aufbewahrt worden. Archimedes hatte diese Aufgabe zuerst gestellt, aber nicht vollständig gelöst, sondern nur auf eine gewisse Konstruktion zurückgeführt.

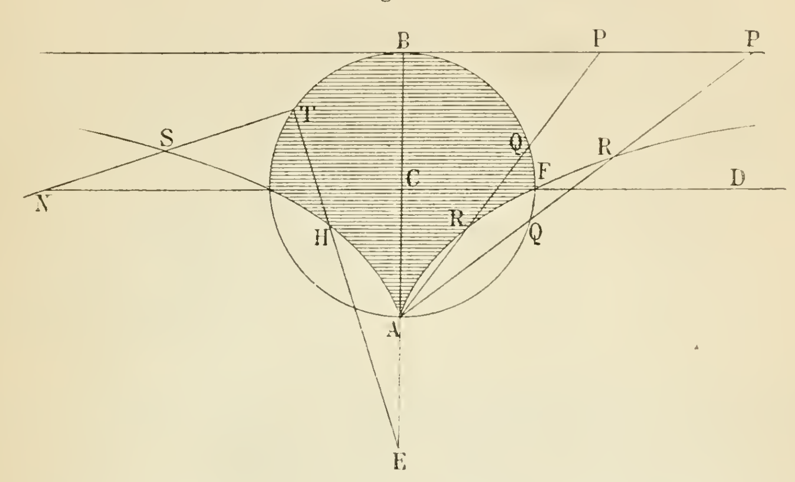
Das Zeitalter der drei Mathematiker Diokles, Hypsikles und Serenos ist nicht mit Bestimmtheit anzugeben. Von einigen Schriftstellern werden die-

[1]) Nach Cantor. — [2]) Suter.

selben nach Chr. Geburt, von anderen dagegen vor Chr. Geburt gesetzt. Diokles soll zuerst die Kissoide zur Verdoppelung des Würfels angewandt haben; und da Pappos bei seiner Uebersicht über die Entwickelung dieses Problems die Lösung des Diokles nicht erwähnt, so schliesst Montucla daraus, dass Diokles nach Pappos gelebt habe. Da jedoch die Kissoide mehrfach in den geometrischen Ausführungen des Geminos erwähnt ist, so müssen wir (nach Suter) annehmen, dass Diokles auch vor Geminos, also etwa im 2. Jahrhundert v. Chr. gelebt hat. Diokles gelang es noch nicht, die Kissoide durch einen einzigen stetigen Zug zu ziehen. Erst Newton hat in seiner „Arithmetica universalis" die mechanische Konstruktion der Kissoide gegeben und Wallis fand ihre Quadratur und Kubatur nebst der Lage ihres Schwerpunktes.

Die Kissoide ist eine krumme Linie III. Grades, deren Gleichung ist: $x^3 = (a - x) y^2$. Wenn man einen Kreis vom Durchmesser $a$ beschreibt, in dem einen Endpunkt eines Durchmessers $AB$ eine Tangente konstruiert, dann von dem andern Endpunkt $A$ aus nach einem beliebigen Punkt $P$ der Tangente eine gerade Linie zieht und auf dieser von $P$ aus ein Stück gleich der in den Kreis

Figur 51.




fallenden Sehne abschneidet ($AQ = PR$), so ist der zuletzt gefundene Punkt $R$ ein Punkt der Kissoide. Newton hat folgende Methode, die Kissoide durch eine stetige Bewegung mechanisch zu beschreiben, angegeben: Wenn eine gerade Linie $NCD$ und ein Punkt $E$ im Abstand $a$ von ihr gegeben ist und es bewegt sich ein rechter Winkel, dessen einer Schenkel $NT = a$, der andere unbegrenzt ist, so, dass der Endpunkt $N$ des ersten Schenkels immer auf der gegebenen Geraden bleibt, während der unbegrenzte Schenkel immer durch den gegebenen Punkt geht, die Spitze des rechten Winkels aber auf der entgegengesetzten Seite der Geraden liegt, als wo der feste Punkt sich befindet, so beschreibt der Halbierungspunkt $S$ des Schenkels $NT$ die Kissoide. Den Namen Kissoide erhielt diese Kurve von Geminos, wegen der Aehnlichkeit, die das Stück $GHARF$, welches die Alten für die ganze Kissoide hielten, zusammen mit dem Halbkreis $GBF$ mit dem Epheublatt (kissos = Epheu) hat.

Eutokios gibt uns die Lösung der Aufgabe der Verdoppelung des Würfels durch Diokles wie folgt:

Es seien in dem Kreis $AHEG$ (Fig. 52) die beiden gegebenen äusseren Proportionalen $AC$ und $CM$ auf zwei senkrecht zu einander stehende Durch-

messer abgetragen. Man ziehe $AM$ und verlängere es unbestimmt. Dann handelt es sich darum, die Linie $EL$ so zu ziehen, dass die Abschnitte $DN$ und $NK$ einander gleich werden; in diesem Fall sind $BF$ und $BE$ die mittleren Proportionalen zu den Geraden $AB$ und $BD$; also sind auch die mittleren Proportionalen zu den mit $AB$ und $BD$ im nämlichen Verhältnis stehenden gegebenen Geraden $AC$ und $CM$ bestimmt. Denn da $KN = ND$, so ist auch $KG = GF$ und daher $JC = CB$, $AB = JE$ und $JK = BF$. Es verhält sich aber

Figur 52.

$$JE : JK = BE : BD$$

ebenso $JE : JK = JK : AJ$

und daher $JK : AJ = BE : BD$.

Hieraus ergibt sich die laufende Proportion

$$JE : JK = JK : AJ = BE : BD$$

oder $AB : BF = BF : BE = BE : BD$

was zu beweisen war. Die Linie $EL$ wird auf die verlangte Weise mit Hilfe der Kissoide $EDG$ gezogen.

Auf einem eigentümlichen Wege fand Diokles auch die Auflösung des Problems, eine Kugel durch eine Ebene nach einem gegebenen Verhältnis durchschneiden zu lassen. Seine Auflösung gründete sich auf eine geometrische Konstruktion mittels des Durchschneidens zweier Kegelschnitte.

Zenodorus, über dessen Lebenszeit die Ansichten ebenfalls verschieden sind, indem er von einigen Historikern als Schüler des Oenopides genannt wird, während ihn andere erst nach Diokles anführen, zeigte unter andern die Falschheit der Meinung, welche man bisher (?) hatte, dass Figuren von gleichem Umfang auch gleichen Inhalt haben müssten. Er ist der Verfasser eines höchst interessanten Buches über Figuren gleichen Umfangs. Von den darin enthaltenen 14 Sätzen mögen folgende hier Platz finden: 1. Unter regelmässigen Vielecken von gleichem Umfang hat dasjenige den grösseren Inhalt, welches mehr Winkel hat. 2. Der Kreis hat einen grösseren Inhalt als jedes ihm isoperimetrische regelmässige Vieleck. 6. Zwei ähnliche gleichschenklige Dreiecke auf ungleichen Grundlinien sind zusammen grösser als zwei auf den nämlichen Grundlinien gleichschenklige Dreiecke zusammen, welche unter sich unähnlich sind, aber mit jenen ähnlichen gleichen Gesamtumfang haben. 7. Unter den isoperimetrischen $n$-Ecken hat das regelmässige den grössten Inhalt. 14. Unter den Kreisabschnitten, welche gleichgrosse Bogen haben, ist der Halbkreis der grösste. Im Raume hat die Kugel bei gleicher Oberfläche den grössten Inhalt.

Der Geometer Hypsikles von Alexandrien lebte nach Heilbronner, Montucla u. a. zur Zeit des Ptolemäos, also Ende des 2. Jahrh. nach Chr., nach Vossius, Delambre, Bretschneider, Suter und Cantor aber um die Mitte des 2. Jahrh. vor Chr. Die letzteren Schriftsteller schliessen dies aus seiner Schrift „über die Aufsteigungen der Gestirne“, in welcher er die Aufgangszeiten der

einzelnen Punkte der Ekliptik ohne Trigonometrie einfach vermittelst einer arithmetischen Progression bestimmen will. Hätte nun Hypsikles nach Ptolemäos gelebt, zu welcher Zeit die Trigonometrie oder besser die Sehnenrechnung schon bedeutende Fortschritte gemacht hatte, so würde er wohl kaum jenen viel unsichereren und beschwerlicheren Weg zur Lösung seiner Aufgabe gewählt haben. Gewöhnlich werden ihm das 14. und 15. Buch des Euklides zugeschrieben, die über die Vergleichung der regulären Körper handeln. Nach neueren Untersuchungen stammt nur das erste dieser beiden Bücher von Hypsikles, während das zweite einem mehrere Jahrhundert n. Chr. lebenden Schriftsteller angehört. Das erste Buch, welches hier allein in Betracht kommt, enthält folgende sechs Sätze: 1. Die vom Mittelpunkt eines Kreises auf die Seite des einbeschriebenen regelmässigen Fünfecks gefällte Senkrechte ist die halbe Summe des Halbmessers und der Seite des einbeschriebenen regelmässigen Zehnecks. 2. Einerlei Kreis fasst des in einerlei Kugel beschriebenen Dodekaeders fünfseitige und Ikosaeders dreiseitige Grenzfläche. 3. Die Oberflächen des Dodekaeders, sowie des Ikosaeders sind beide dem dreissigfachen Rechteck gleich, welches aus der Seite des Körpers und der aus dem Mittelpunkt einer Grenzfläche auf die Seite gefällten Senkrechten gebildet wird. 4. Die Oberfläche des Dodekaeders verhält sich zu der des Ikosaèders wie die Seite des Würfels zur Seite des Ikosaeders. 5. Die Seite des Würfels verhält sich zur Seite des Ikosaeders, wie sich die Hypotenusen zweier rechtwinkligen Dreiecke verhalten, welche eine Kathete gemeinschaftlich und als andere Kathete den grösseren, beziehungsweise den kleineren Abschnitt besitzen, der entsteht, indem die gemeinschaftliche Kathete nach stetiger Proportion geschnitten ist. 6. Der Körper des Dodekaeders verhält sich zum Körper des Ikosaeders wie die Seite des Würfels zur Seite des Ikosaeders. (Nach Cantor dürfte diese Abhandlung um etwa 180 v. Chr. geschrieben sein.)

Auch über die Lebenszeit des Mathematikers Serenos bestehen entgegengesetzte Ansichten, und während ihn Suter in das 2. Jahrh. vor Chr. setzt, sagt Cantor: Serenus lebte sicherlich nach Chr. Geburt. Seine beiden Schriften über den Schnitt des Cylinders und des Kegels durch die Spitze können gleichsam als eine Ergänzung zu den Kegelschnitten des Apollonios betrachtet werden, was die meisten Schriftsteller bewogen hat, ihn unter die ersten Nachfolger des grossen Geometers einzureihen. In seinen beiden genannten Schriften zeigt er, dass die Schnitte des Cylinders und des Kegels durch die Spitze ebensogut Kegelschnitte seien, wie die gewöhnlichen Schnitte des Kegels, und löst alsdann Aufgaben, wie z. B. zu einem gegebenen Kegel einen Cylinder zu finden und beide durch eine und dieselbe Ebene so zu schneiden, dass der Schnitt ähnliche Ellipsen bilde. Er sucht ferner das grösste Dreieck zu bestimmen, das durch die Schnitte des Kegels durch die Spitze gebildet wird. Commandinus hat den Serenos übersetzt und kommentiert.

„Die alexandrinische Schule verfolgte konsequent ihre Richtung, und die Erforschung der Natur in ihren Teilen machte immer grössere Fortschritte. Mit Glück hatte man angefangen, die Mathematik auf die Naturwissenschaften anzuwenden, Euklid in der Optik und Mechanik, und Archimedes in der Mechanik. Die Astronomie besonders blühte in Alexandrien; von der blossen Beobachtung war man bereits zu wirklichen Messungen vorgeschritten, aber die Mathematik konnte diesem Zweige noch wenig Unterstützung gewähren. Die Rückwirkung konnte jedoch nicht ausbleiben, und was die Zeit bedarf, erzeugt sie sich unabweislich. Die Verwendung des Kreises zum Messen der Winkel ist uralt und allein durch die Astronomie herbeigeführt worden. Man teilte den ganzen Umfang in vier gleiche Teile, Quadranten; jeden Quadranten wieder in 90 gleiche Teile, welche wir jetzt Grade nennen; ebenso den Grad in 60 Minuten, die

Minute in 60 Sekunden. Der Ursprung dieser Einteilung ist ebensowenig zu verfolgen. Wenn die Seiten eines Dreiecks gegeben sind, so kann man dasselbe zeichnen: legt man nun auf eine Ecke in geeigneter Weise einen geteilten Kreis, so kann man sehen, wie viele Teile des Kreises der Winkel umfasst oder wie viele Grade er enthält. Diese Methode setzt eine genaue Zeichnung, ein gut geteiltes Instrument und den Gebrauch voraus, die Linien und Winkel durch Zahlen darzustellen, was die Griechen bisher in ihren wissenschaftlichen Werken nicht gethan hatten; dabei gewährte sie nur eine geringe Annäherung. Es musste daher eine Methode erfunden werden, die unbekannten Stücke einer Figur durch Rechnung mit grösserer Genauigkeit, wenn auch nur annäherungsweise, zu erhalten. Den Grund zu einer solchen Methode hatte schon Archimedes in seiner Kreisrechnung gelegt; er hatte die Verhältnisse der Seite des Sechsecks und aller Halbierungen derselben bis zum Sechsundneunzigeck zum Durchmesser des Kreises berechnet; es war nur ein kleiner Schritt weiter, den Durchmesser in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zu teilen und die Seiten dieser Vielecke in solchen Teilen auszudrücken. Mit der Kenntnis solcher Sehnen des Kreises hat es aber folgende Bewandnis. Es sei $AB$ die Seite des ordentlichen Sechsecks im Kreise, so ist der $\angle C_{I} = 60^0$. Man nehme nun an, der Durchmesser sei in 120 gleiche Teile geteilt, so kommen auf $AB$ 60 solcher Teile. Ist nun dieses bekannt und wollte man in einem rechtwinkligen Dreieck $abd$, in welchem $\angle adb = 30^0$, $\angle abd = 90^0$ und $ab = 142$ Längeneinheiten beträgt, die Seite $ad$ berechnen, so würde folgende Betrachtung zum Ziele führen. Beschreibt man über $ad$ als Durchmesser einen Kreis, so geht dieser über $b$, weil alle Dreiecke im Halbkreise rechtwinklig sind. Man beschreibe ferner aus demselben Mittelpunkt einen zweiten Kreis, dessen Durchmesser $AD = 120$ und zeichne das Dreieck $ABD$, so dass wieder Winkel $ADB = 30^0$. Die beiden Dreiecke sind ähnlich. Zieht man jetzt $CB$, so geht die Verlängerung dieser Linie durch $b$ und es ist der $\angle C_{I}$ das Doppelte von $\angle D_{I}$, also $60^0$. Wenn nun der Durchmesser $AD$ 120 Teile enthält, so enthält die Sehne $AB$ 60 Teile, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke kann man folgende Proportion ansetzen: $AB : ab = AD : ad$ oder $60 : 142 = 120 : x$; hieraus folgt $x = 2 \cdot 142 = 284$. In derselben Weise kann man auch $bd$ berechnen, sobald man die Sehne $BD$ kennt. Diese Sehne entspricht dem $\angle C_{II} = 2 \angle C_{I} = 120^0$. Ueberhaupt, wenn man für alle Mittelpunktswinkel von $0^0$ bis $180^0$ die Längen der zugehörigen Sehnen in Teile des Durchmessers ausgedrückt kennt, so kann man alle vorkommenden Rechnungen über das rechtwinklige Dreieck ausführen, und auch für jedes schiefwinklige Dreieck, da sich dasselbe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen lässt. Man denke sich nun eine Tafel, in welcher auf der einen Seite die Winkel und auf der andern die Längen der zugehörigen Sehnen stehen, so lassen sich aus den Seiten auch die Winkel finden. Es sei wieder in dem Dreieck $abd$, $ab = 142$ und $ad = 284$ gegeben und man will wissen, wie gross der $\angle adb$ ist. Es ist $ad : AD = ab : AB$, also $284 : 120 = 142 : x$, mithin $x = \frac{120 \cdot 142}{284} = 60$; nun findet man aber in der Tafel, dass wenn $AB = 60$ ist, so muss der $\angle C_{I} = 60^0$, also $\angle D_{I} = \angle adb = 30^0$ sein. Wer diesen Gedankengang, die Sehnen auf solche Art zu benutzen, zuerst angeregt hat, oder woher die Anregung gekommen ist, ist natürlich nicht zu ermitteln; aber die Ansichten

Figur 53.

der Griechen in der Geometrie mussten erst eine völlige Umwandlung erleiden, ehe sie dazu kommen konnten. Diese Richtung wurde jedoch bald vorherrschend, und wir haben wenig bedeutende Erzeugnisse mehr in der eigentlichen Geometrie anzuführen. Merkwürdig bleibt es immer, dass gerade Alexandrien der Hauptsitz dieser Richtung wurde, der Ort, an welchem die geistigen Erzeugnisse und die Ideenkreise der ganzen alten Welt zusammenflossen und sich zu Neuem zu gestalten strebten. Derjenige Teil der Mathematik, welcher lehrt, wie man aus einer hinreichenden Anzahl gegebener Stücke einer Figur die übrigen berechnen kann, wird jetzt allgemein Trigonometrie genannt, obschon sich dies ursprünglich nur auf das Dreieck bezog. Man teilt sie ein in die ebene und die sphärische Trigonometrie, je nachdem das zu berechnende Dreieck in einer Ebene liegend von geraden Linien gebildet wird, oder auf der Oberfläche einer Kugel durch Schnitte grösster Kreise entsteht. Die letztere war es nun, welche besonders zur Astronomie erfordert und deshalb auch zuerst kultiviert wurde, und hier zeigt sich nun wieder, wie die Anwendung der Mathematik auf Lebenszwecke immer gegen die der geistigen Interessen zurückblieb."

„Der erste, der in dieser Richtung ausgezeichnet gewesen zu sein scheint, und den Uebergang aus der vorhergehenden in diese Periode bildet, war Hipparchos aus Nicäa in Bithynien in Kleinasien. Er lebte auf Rhodus, und dann in Alexandrien, und starb um 125 v. Chr. Als der wahre Begründer der mathematischen Astronomie wird er mit Recht der grösste Astronom des Altertums genannt. Er hat ein Werk in 12 Büchern geschrieben, worin von den Sehnen der Kreisbögen gehandelt wird, und seine astronomischen Berechnungen erforderten die Kenntnis der ebenen und sphärischen Trigonometrie, deren Erfindung man ihm zuschreibt, weil vor ihm noch keine Spur dieser Zweige der Geometrie nachgewiesen werden kann. Nur weniges von seinen Arbeiten ist auf uns gekommen, und die Berichte anderer Schriftsteller lassen uns nicht erkennen, wie seine Untersuchungen beschaffen und wie weit sie gediehen waren. Man weiss, dass er zuerst ein Verzeichnis von Fixsternen angelegt hat, und es liegt bei dieser Richtung nicht sehr ferne, zu vermuten, dass er auch der erste gewesen sein möchte, der eine Sehnentafel entworfen hat. Hierauf kam eigentlich alles an; die Trigonometrie bedurfte Tafeln, in welchen für jeden Mittelpunktswinkel die Länge der Sehne, in Teilen des Durchmessers ausgedrückt, enthalten war." [1])

Menelaos aus Alexandrien machte sich, 100 Jahre nach Chr., durch Bemühungen auf dem Gebiete der Trigonometrie bekannt. Er schrieb sechs Bücher von Sehnen im Kreise, die aber verloren gegangen sind. Dieses Werk war wahrscheinlich eine trigonometrische Abhandlung, eine Anleitung zur Konstruktion trigonometrischer Tafeln, wie sie nach dem Zeugnis des Theon von Alexandrien schon Hipparch verfasst und bei seinen astronomischen Berechnungen angewandt haben soll. Für die Lehre von den Lagen der Kreise auf einer Kugeloberfläche gegen einander und von solchen Dreiecken, die von grössten Kreisen auf einer Kugeloberfläche gebildet werden, schrieb schon 50 Jahre v. Chr. Theodosius. Diese Untersuchungen waren, wenigstens teilweise, eine Grundlage für die sphärische Trigonometrie, obgleich über die sphärischen Dreiecke darin noch nicht gehandelt wird.

Menelaos wird auch als der Erfinder des sogen. Transversalensatzes, auf den Ptolemäos seine sphärische Trigonometrie gründete, genannt, dass nämlich unter den durch eine Transversale gebildeten sechs Abschnitten der Seiten eines Dreiecks die Beziehung bestehe, dass das Produkt von drei Segmenten, die keinen Endpunkt gemein haben, gleich sei dem Produkt der drei andern Segmente. Dieser Satz heisst noch heute in den Lehrbüchern der Geometrie der

[1]) Arneth.

Lehrsatz des Menelaos und wird folgendermassen bewiesen. Die Gerade $FED$ schneidet entweder zwei Seiten selbst und die Verlängerung der dritten, oder sie schneidet alle drei Seiten in der Verlängerung. In beiden Fällen wird

Figur 54a.



Figur 54b.



behauptet $AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE$. Beweis: Man ziehe in beiden Fällen $CG$ parallel $EF$ und betrachte Dreieck $AGC$ mit der Parallelen $FE$, Dreieck $BFD$ mit der Parallelen $GC$. Es ist

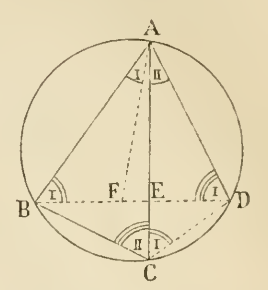
$$\begin{array}{lr} \text{im } \triangle AGC \text{ aber} & AF : AE = GF : CE \\ \text{im } \triangle BFD & BD : BF = CD : GF \\ \hline & AF \cdot BD : AE \cdot BF = CD : CE \\ \hline & AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE. \end{array}$$

Dieser Satz, welcher schon vor Menelaos bekannt war, wird von ihm auch für das sphärische Dreieck bewiesen, wenn die Seiten desselben auf ähnliche Weise durch einen grössten Kreis geteilt werden. Man sieht, dass dies eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes aus der Theorie der Proportionallinien ist und zwar des folgenden: eine gerade Linie, welche parallel mit der Grundlinie eines Dreiecks gezogen wird, teilt die Seiten in proportionale Teile. In der Sphärik des Menelaos finden sich schon die Sätze, dass in jedem sphärischen Dreieck die Summe der drei Seiten kleiner als ein Grösstkreis der Kugel, die Summe der drei Winkel grösser als $2R$ sein muss, dass gleichen Seiten desselben sphärischen Dreiecks gleiche, ungleichen Seiten ungleiche Winkel, und zwar den grösseren Seiten die grösseren Winkel gegenüberstehen. In ihr finden sich die hauptsächlichsten Kongruenzsätze sphärischer Dreiecke, der Satz, dass die drei Hauptbögen, welche die Winkel eines sphärischen Dreiecks halbieren, sich in einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt treffen, sowie der Satz, dass der Hauptbogen, welcher einen Winkel eines sphärischen Dreiecks halbiert, die dem Winkel gegenüberliegende Seite so schneidet, dass die Sehnen der verdoppelten Abschnitte im gleichen Verhältnis stehen, wie die Sehnen der gleichfalls verdoppelten jeweils anliegenden Seiten.

Klaudius Ptolemäos aus Pelusium in Aegypten, einer der grössten Astronomen des Altertums (um 125 n. Chr.), führte zu Ende, was Hipparch und Menelaos vor ihm begonnen hatten. Er schuf eine Trigonometrie von so vollendeter Form, dass sie weit über ein Jahrtausend nicht überboten wurde, und sein Almagest ist das einzige, was wir von den Griechen über ebene und sphärische Trigonometrie besitzen, da die Werke des Hipparch über diesen Gegenstand untergegangen sind. Man findet in Ptolemäos' Werke die schöne Eigenschaft des in einen Kreis einbeschriebenen Vierecks, dass das Produkt der beiden Diagonalen gleich ist der Summe der Produkte je zweier gegenüberliegenden

Seiten. Dieser Satz findet sich heute noch unter dem Namen des Ptolemäischen Lehrsatzes in jedem Lehrbuch der Geometrie und wird wie folgt bewiesen: Voraussetzung: $ABCD$ ein Sehnenviereck. Behauptung: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. Beweis: Man konstruiere $\angle A_{I} = \angle A_{II}$, so erhält man zwei Paare ähnlicher Dreiecke. 1) $\triangle ABF \sim ACD$, denn $\angle A_{I} = \angle A_{II}$ nach Konstruktion und $\angle B_{I} = \angle C_{I}$ als Peripheriewinkel auf demselben Bogen $AD$. 2) $\triangle AFD \sim \triangle ABC$, denn $\angle FAD = \angle BAD$, wie aus der Konstruktion folgt, und $\angle D_{I} = C_{II}$ als Peripheriewinkel auf demselben Bogen $AB$. Man bilde nun aus jeder der beiden Aehnlichkeiten eine Proportion, mit Ausschliessung der Seite $AF$, so erhält man 1) $AB : BF = AC : CD$; 2) $AD : DF = AC : CB$. Man bilde ferner aus diesen Proportionen die Rechtecksgleichungen und stelle die Rechtecke nach links, welche die Stücke $BF$ und $DF$ als Faktoren enthalten, so ergibt sich 1) $BF \cdot AC = AB \cdot CD$; 2) $DF \cdot AC = AD \cdot CB$. Hieraus folgt durch Addition

Figur 55.




$$BF \cdot AC + DF \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot CB$$
$$AC(BF + DF) = AB \cdot CD + AD \cdot CB$$
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot CB.$$

Dieser Satz bildet den Ausgangspunkt der Sehnenberechnung des Ptolemäos. Auf denselben folgt: 1) Aus den Sehnen zweier Bögen die Sehne ihres Unterschiedes, 2) aus der Sehne eines Bogens die Sehne des halb so grossen Bogens, 3) aus den Sehnen zweier Bögen die Sehne ihrer Summe zu finden. Die Beweise der betreffenden Sätze sind dem Sinne nach folgende:

1) Aus $ab$ und $ac$ soll $bc$ gefunden werden. Man zieht von $a$ aus den Durchmesser $ad$ (den Ptolemäos in 120 Teile zerlegt) und vollendet das Sehnenviereck $abcd$ nebst seinen Diagonalen. Nun ist $cd = \sqrt{120^2 - ac^2}$, $bd = \sqrt{120^2 - ab^2}$; $ac \cdot bd = ad \cdot bc + ab \cdot cd$ oder $ac\sqrt{120^2 - ab^2} = 120 \cdot bc + ab\sqrt{120^2 - ab^2}$, woraus $bc$ gefunden werden kann.

Figur 56.

Figur 57.

Figur 58.

2) Soll ferner aus $bc$ die Sehne $cd$ des halb so grossen Bogens ermittelt werden, so zieht man den Durchmesser $ac$, ausserdem $ab$, $ad$, $bd$, schneidet auf dem Durchmesser $ac$ das Stück $ae = ab$ ab, zieht $de$ und endlich $df$ senkrecht zum Durchmesser $ac$. Die Dreiecke $bad$, $ead$ sind nun kongruent, weil die beiden gleichen, in $a$ ihre gemeinschaftliche Spitze besitzenden Winkel von gleichen Seiten gebildet werden. Demgemäss sind auch die dritten Seiten gleich

$bd = de$, und da überdies $bd = dc$ als Sehnen gleicher Bögen, so ist $\triangle dec$ gleichschenklig und die Senkrechte $df$ auf dessen Grundlinie halbiert dieselbe, d. h. es ist $fc = \frac{1}{2} ec = \frac{1}{2}(ac - ae) = \frac{1}{2}(120 - ab) = 60 - \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - bc^2}$. Ferner sind die beiden rechtwinkligen, einen spitzen Winkel gemeinschaftlich enthaltenden Dreiecke $cdf$, $cad$ ähnlich, also $fc : cd = cd : ac$ und $cd^2 = ac \cdot cf = 120\left[60 - \frac{1}{2}\sqrt{120^2 - bc^2}\right]$, woraus endlich $cd$ sich ergibt.

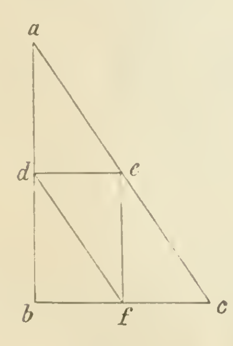
3) Aus den Sehnen $ab$ und $bc$ die Sehne $ac$ zu finden. Zu diesem Zwecke werden die Durchmesser $ad$ und $be$, ausserdem $bd$, $dc$, $ce$ und $de$ gezogen, welche letztere wegen der Kongruenz der Dreiecke $abo$, $deo$ der $ab$ gleich sein muss. Der auf das Sehnenviereck $bcde$ angewandte ptolemäische Lehrsatz liefert nunmehr $bd \cdot ce = bc \cdot de + be \cdot cd$ oder $\sqrt{120^2 - ab^2} \cdot \sqrt{120^2 - bc^2} = bc \cdot ab + 120\sqrt{120^2 - cd^2}$, wodurch $cd$ bestimmt ist.

Von den Zahlenwerten der Seiten des Vierecks, Fünfecks, Sechsecks und Zehnecks ausgehend, welche ihm die Sehnen von $90^0$, $72^0$, $60^0$ und $36^0$ in Teilen des Durchmessers gaben, diesen zu 120 Teilen angenommen, berechnete Ptolemäos durch Halbierungen und Zusammensetzungen, unter Zuhilfenahme obiger Sätze, eine Tafel, welche die Sehnen von allen Winkeln von $0^0$ bis $180^0$, von 30 zu 30 Minuten enthielt. Bei der Genauigkeit, welche er durch seine Tafel zu erreichen vermochte, war eine grössere Ausdehnung derselben nicht nötig, indem eine leichte Rechnung die Sehnen für andere Winkel gab. Hierzu dienten die Unterschiede der Reihe der Sehnen, welche wie bei unseren Tafeln benutzt wurden, oder vielmehr, er teilte sogleich diese Unterschiede durch 30, um den Unterschied für eine Sekunde anzufügen.

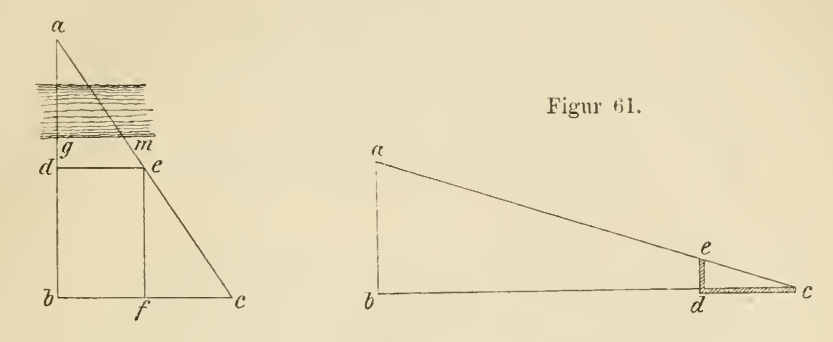
Ausserdem verdankt die Geometrie dem Ptolemäos die Lehre von den Projektionen, zu denen er in zwei vortrefflichen Werken den Grund legte. Ptolemäos schrieb ein Buch über die drei Dimensionen der Körper, woraus man sieht, dass er der erste war, welcher von drei rechtwinkligen Achsen gesprochen hat.

In dem 3. Jahrhundert nach Chr. schrieb Sextus Julius Africanus seine Kesten (d. h. „Angeheftetes"), worin er sich unter anderem mit praktischer Kriegsgeometrie, insbesondere mit der Auffindung der Breite eines Flusses, dessen jenseitiges Ufer vom Feinde besetzt ist, und mit der Auffindung der Höhe einer Mauer einer belagerten Stadt beschäftigt. Die Grundlage des ganzen Verfahrens ist der geometrische Satz, dass sämtliche Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks halbiert erscheinen, wenn aus der Mitte einer Kathete parallel zur andern eine Gerade nach der Hypotenuse und aus deren Durchschnittspunkt wieder eine neue Parallele zur ersten Kathete bis zum Durchschnitt mit der zweiten gezogen wird. Sei $ab$ die erste Kathete und ausser den vorgeschriebenen $de$, $ef$ noch die Hilfslinie $df$ gezogen; $ad = db$, $db = ef$ als Parallele zwischen Parallelen, folglich auch $ad$ parallel $ef$ und somit treten in der Figur zwei Parallelogramme auf: $cedf$, $dbfe$, vermöge deren $de = cf = bf$ und $df = ec$, während (aus dem Parallelogramm $adfe$) auch $df = ae$. Von diesem Satz aus wird die Breite eines Flusses gemessen. Liegt $a$ am feindlichen Ufer, während $gm$ die diesseitige Uferlinie bezeichnet, so stellt man die Dioptra in $b$ auf, weiter vom Fluss entfernt, als der Fluss breit ist, und visiert sowohl (senkrecht zur Flusslinie $gm$) nach $a$, als rechtwinklig zu dieser ersten Linie nach $c$, so

Figur 59.



dass dabei der Punkt $f$ in der Mitte von $bc$ gewonnen wird. Steckt man nun von $c$ aus die Richtung $ac$, von $f$ aus $fe$ parallel $ba$ und endlich $de$ parallel $bc$ ab, so ist $ab$ doppelt so gross, $ad$ gleich gross mit $bd$ und lässt nach Abziehung von $gd$ die gesuchte $ag$ übrig.




Um die Höhe einer Mauer zu messen, wird die Dioptra in $d$ Fig. 61 als $de$ aufgestellt und ihr Lineal in die Neigung $ea$ gebracht, wo $a$ einen Punkt des oberen Mauerrandes bedeutet. Die Rückverlängerung dieser Richtung $ea$ nach $c$ lehrt $ed$ neben dem bekannten $de$ finden, sowie neben dem nach der vorigen Aufgabe ermittelten $bc$ und nun ist $cd:de = bc:ba$. Der Schüler Herons ist hier unverkennbar.[1])

Die grossen Erfindungen in den mathematischen Wissenschaften, welche dem Altertum zu machen bestimmt waren, sind damit abgeschlossen. Von jetzt ab findet man keine Originalschriftsteller, sondern nur gelehrte und berühmte Kommentatoren,[2]) die aus der griechischen Schule zu Alexandrien hervorgingen. Pappos jedoch, das Haupt derselben, verdient einen höheren Rang einzunehmen, denn seine Werke zeigen noch den Geist und die produktive Kraft der früheren Jahrhunderte. Derselbe gab 375 n. Chr. eine vortreffliche Sammlung von mathematischen Lehrsätzen und Aufgaben (Collectiones mathematicae) samt ihren Auflösungen heraus, die die seltensten und schönsten Erfindungen hervorragender Mathematiker, hauptsächlich auf dem Gebiet der höheren Geometrie enthält. Besonders sind darin die interessanteren Eigenschaften der Kegelschnitte, der Konchoide, der Quadratrix, der Spiralen und anderer Kurven behandelt; dann eine Uebersicht über die Entwickelung der Probleme über die Verdoppelung des Würfels und die Trisektion des Winkels gegeben, der er am Ende seine eigene Lösung des ersten Problems anschliesst. In den letzten Büchern geht Pappos auf Sätze der Isoperimetrie über, die allein schon sein vorzügliches mathematisches Talent beurkunden. Der 10. dieser Sätze sagt, dass unter geradlinigen Figuren von gleichem Umfang, mit derselben Anzahl Seiten, diejenige den grössten Inhalt hat, welche gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. Die in die planimetrischen Lehrbücher aufgenommene Berührungsaufgabe von Pappos lautet: Wenn von Punkten, Geraden oder Kreisen irgend zwei gegeben sind, einen Kreis von gegebenem Halbmesser zu beschreiben, welcher die gegebenen Punkte, Geraden oder Kreise berührt. Diese allgemeine Aufgabe begreift sechs besondere Fälle, je nachdem zwei Punkte oder ein Punkt und eine Gerade etc. gegeben sind.

---

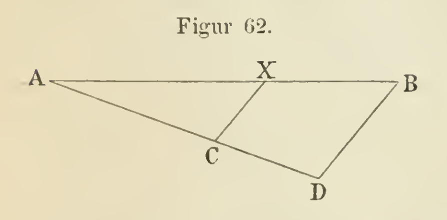
[1]) Nach Cantor. — [2]) Unter Kommentatoren (vom lat. commentarius, Buch, Denkbuch) versteht man Ausleger, Erklärer eines Buches.

Pappos hat nicht allein die im einzelnen fast insgesamt verlorengegangenen vorzüglichen Werke zusammengestellt, er teilt auch zugleich diejenigen Lehrsätze nebst ihren Beweisen mit, welche zum Verständnis der vornehmsten geometrischen Werke nötig sind. Besonders den Geist der geometrischen Analysis der Alten lernt man aus dieser Sammlung kennen, indem er in der Vorrede zu dem 7. Buch den Inhalt der wichtigsten geometrisch-analytischen Werke anzeigt, wovon wir ohne ihn nicht die Titel wissen würden, und in dieser Abteilung seiner Sammlung hat er zu jenen Schriften eine grosse Anzahl Lemmata (Erläuterungs- und Vorbereitungssätze) mitgeteilt, die nach der Methode jener behandelt sind. In der gedachten Vorrede führt er auch die bei den Alten sehr wichtige Aufgabe an, den geometrischen Ort zu finden, wodurch die von jedem Punkt desselben an gegebene gerade Linien gezogenen Perpendikel gegebene zusammengesetzte Verhältnisse bilden. Die Alten konnten sie nur für den Fall von drei oder vier gegebenen geraden Linien auflösen; der neueren Analysis war es vorbehalten, eine uneingeschränkte Auflösung zu liefern.

Unter den Sätzen, welche zur Theorie der Transversalen gehören, sagt der 129. Satz des Pappos: Wenn vier Linien von einem Punkt ausgehen, so bilden sie auf einer Transversalen, die willkürlich in derselben Ebene gezogen wird, vier Segmente, welche unter sich ein bestimmtes konstantes Verhältnis haben, wie auch die Transversale gezogen werden mag; d. h. das Verhältnis $\frac{ac}{ad} = \frac{bc}{bd}$ wird dasselbe bleiben, welches auch die Transversale sein mag. Da dieser Hauptsatz von Pappos als Hilfssatz für das leichtere Verständnis der Porismen des Euklid in verschiedenen Formen wiederholt wird, so scheint er in den Porismen von besonderem Nutzen gewesen zu sein. Dieses Verhältnis $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$ wird ein anharmonisches Verhältnis oder eine anharmonische Funktion der vier Punkte $a$, $b$, $c$, $d$ genannt; ist aber der Wert des obigen Verhältnisses gleich der Einheit, so ist $\frac{ac}{ad} = \frac{bc}{bd}$ das harmonische Verhältnis und die vier Punkte werden die harmonischen Punkte genannt.

Zum besseren Verständnis diene noch folgendes: Die Aufgabe, die Strecke $AB$ Fig. 62 durch einen Punkt $X$ in einem gegebenen Verhältnis zu teilen, wird leicht gelöst, indem man an die zu teilende Strecke $AB$ in $A$ eine beliebige Konvergente anlegt und auf dieser von $A$ aus zwei Strecken $AC$, $CD$ nacheinander abträgt, welche in dem gegebenen Verhältnis stehen, den letzten, so auf der Konvergenten erhaltenen Punkt mit $B$ verbindet und durch $C$ eine Parallele zu $BD$ zieht; letztere schneidet dann $AB$ in dem gesuchten Teilpunkt $X$.

Figur 62.



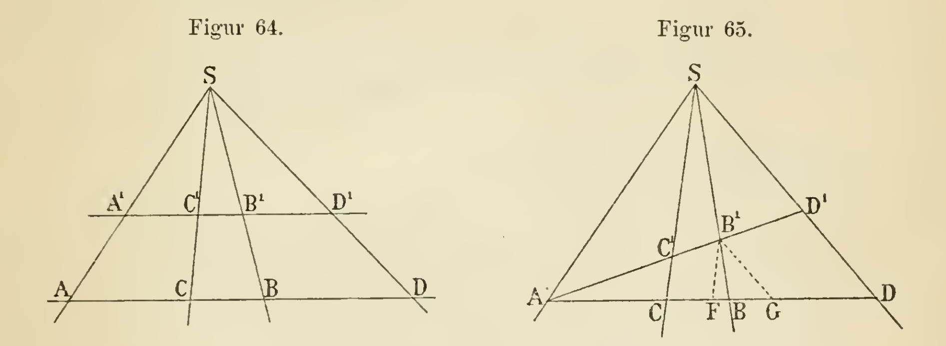

Die Aufgabe ist hierbei so aufgefasst, dass $X$ zwischen $A$ und $B$ liegen soll: sie kann jedoch in einem erweiterten Sinne aufgefasst werden, nach welchem es auch gestattet ist, einen Teilpunkt auf der Verlängerung von $AB$ zu denken. Ist nämlich $Y$ ein solcher Punkt auf der Verlängerung von $AB$, so hat derselbe in gleicher Weise wie der zwischen $A$ und $B$ liegende Punkt $X$ von jedem der Endpunkte von $AB$ eine bestimmte Entfernung $AY$ oder $BY$. Zu jedem Punkte $X$ einer Strecke kann aber nur ein einziger

Figur 63.

A X B Y

entsprechender Punkt $Y$ auf der Verlängerung derselben gehören, so dass beide Punkte die Strecke in demselben Verhältnis teilen, dass also $AX:BX = AY:BY$ ist. Solche Punkte heissen harmonische Teilpunkte der Strecke $AB$, und man sagt von ihnen, dass sie $AB$ harmonisch teilen. Zu jeder Strecke gehören unendlich viele Paare harmonischer Teilpunkte, indem der Punkt $X$ von $A$ ausgehend und sich nach $B$ hinbewegend, jede Stelle zwischen $A$ und $B$ einnehmen kann. Da durch Umstellung der Glieder der obigen Proportion die andere $AX:AY = BX:BY$ folgt, so gilt der Satz: Ist eine Strecke $AB$ durch zwei Punkte $X$, $Y$ harmonisch geteilt, so wird auch die Strecke $XY$ durch die Punkte $AB$ harmonisch geteilt, daher nennt man vier solche Punkte überhaupt vier harmonische Punkte der betreffenden Geraden, und je zwei zusammengehörige $AB$ und $XY$ werden einander zugeordnet genannt. Aus $AX:BX = AY:BY$ folgt weiter $AX \cdot BY = BX \cdot AY$, d. h. das Rechteck aus den beiden äusseren Abschnitten ist gleich dem Rechteck aus der ganzen Linie und dem mittleren Abschnitte.

Es sei ferner $S$ der Scheitel von vier Strahlen Fig. 64, welche durch je einen von vier harmonischen Punkten $AB$, $CD$ gehen, und es werden dieselben Strahlen durch eine zweite Transversale bezüglich in den Punkten $A'B'$, $C'D'$ geschnitten, so sind folgende Fälle zu unterscheiden: a) $A'D'$ sei parallel zu $AD$. Dann ist, weil $A'C':B'C' = AC:BC$ und ebenso $A'D':B'D' = AD:BD$ auch $A'C':B'C' = A'D':B'D'$. Es falle ferner b) $A'$ mit $A$ zusammen Fig. 65. Zieht man dann die Linien $B'F$ parallel $C'C$ und $B'G$ parallel $D'D$ bis zum Durchschnitt mit $AD$, so ist




Figur 64. Figur 65.

$CF:BC = SB':SB$ und $GD:BD = SB':SB$, daher auch $CF:BC = GD:BD$ oder $CF:GD = BC:BD$. Nun ist zufolge der Voraussetzung $BC:BD = AC:AD$, also auch $CF:AC = GD:AD$. Ferner ist $CF:AC = B'C':AC'$ und $GD:AD = B'D':AD'$, woraus endlich wieder $AC':B'C' = AD':B'D'$ folgt. Ist endlich c) weder $A'D'$ parallel $AD$, noch $A'$ mit $A$ identisch, so ziehe man durch $A'$ die Parallele zu $AD$ und wende die vorstehenden Entwickelungen nacheinander an. Man gelangt so zu dem allgemein gültigen Satz: Vier harmonische Strahlen schneiden jede Transversale in vier harmonischen Punkten. — Durch Umkehrung des vorstehend bewiesenen Hauptsatzes gewinnt man den folgenden: Liegen auf zwei Geraden je vier harmonische Punkte $AB$, $CD$ und $A'B'$, $C'D'$ so, dass drei der Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ einander in einem und demselben Punkt $S$ schneiden, so geht auch die vierte durch diesen Punkt. Der Beweis geschieht leicht indirekt, indem man $S$ mit dem vierten Punkt $D$ verbindet und zeigt, dass die Linie $SD$ die Gerade $A'D'$ in keinem von $D'$ verschiedenen Punkt treffen kann.

Der 131. Satz des Pappos lehrt: Dass in jedem Viereck eine Diagonale harmonisch geschnitten wird durch die andere Diagonale und durch die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten.

Schneidet aber eine Transversale die Seiten eines ebenen Vielecks oder deren Verlängerungen, so teilt sie jede Seite so in zwei Teile, dass das Produkt aus der einen Hälfte der Abschnitte, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich ist dem Produkt der andern Hälfte. Für das Dreieck ist dieser Satz schon bei Menelaos (s. d.) angeführt worden und es lassen sich aus ihm eine Menge interessanter Eigenschaften dieser Figur herleiten. „Diese Sätze sind von so grosser Allgemeinheit, dass sie die Grundlage der neueren synthetischen Geometrie geworden sind: auf ihnen beruhen die schönsten Theorien, welche die Geometrie überhaupt kennt, und aus dem Werke des Pappos sehen wir eben, dass diese Grundlagen den Alten schon bekannt waren, obgleich sie dieselben noch nicht weiter zu entwickeln vermochten.“

Figur 66.

Aus der neueren synthetischen Geometrie möge hier noch folgendes Platz finden: Zieht man durch irgend einen Punkt $O$ innerhalb oder ausserhalb eines Dreiecks $ABC$ Figur 66 die drei Ecktransversalen $AA'$, $BB'$, $CC'$ und legt durch zwei Fusspunkte $A'B'$ derselben die Transversale, welche die dritte Seite $AB$ oder deren Verlängerung in $D$ schneidet, so ist sowohl nach dem Lehrsatz des Ceva (s. d.):

$$AB' \cdot CA' \cdot C'B = AC' \cdot BA' \cdot CB'$$

als nach dem Lehrsatz des Menelaos (s. d.): $AB' \cdot CA' \cdot BD = AD \cdot BA' \cdot CB'$.

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen mittels Division erhält man:

$$BC' : BD = AC' : AD,$$

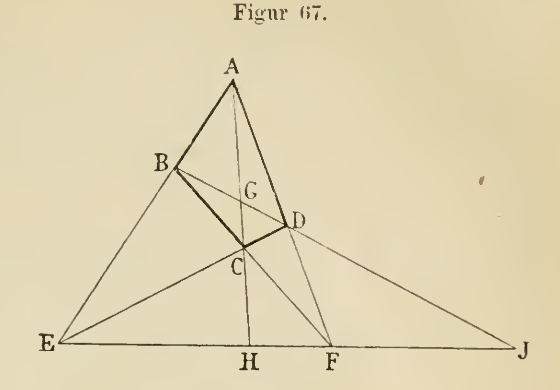
d. h. $A$, $B$ und $C'$, $D$ sind zwei Paare einander zugeordneter harmonischer Punkte. Daraus folgt ferner, dass $OB$, $OA$ und $OC'$, $OD$ vier harmonische Strahlen sind und diese müssen somit auch auf den Transversalen $A'D$ und $CC'$ je vier harmonische Punkte bestimmen. Es ist also, wenn $E$ den Durchschnittspunkt dieser beiden letzteren Transversalen bezeichnet, auch $A'E : B'E = A'D : B'D$ und hieraus folgt wieder, dass auch $BA'$, $BB'$ und $BE$, $BD$ vier harmonische Strahlen sind, welche mithin auch auf $CC'$ vier harmonische Punkte bestimmen, oder es ist $CE : OE = CC' : OC'$. Die durch $A'$ und $B'$ gelegte Transversale bestimmt also nicht nur auf der dritten Seite, sondern auch auf der dritten Ecktransversale zu den vorher vorhandenen drei Punkten den vierten harmonischen Punkt und wird selbst in $E$ und $D$ harmonisch geteilt. Diese Behauptung gilt in entsprechender Weise für die durch $A'$ und $C'$ und für die durch $B'$ und $C'$ gehende Transversale. Jede der Verbindungslinien von $A'$, $B'$ und $C'$ wird also durch die betreffende Ecktransversale und die dritte Seite harmonisch geteilt.

Die vier Punkte $A'OB'C$ der vorhergehenden Figur bilden die Eckpunkte eines Vierecks, von dem je zwei gegenüberliegende Seiten bis zu ihrem Durchschnittspunkt $B$ oder $A$ verlängert, und in welchem ausserdem die Diagonalen $CO$, $A'B'$ gezogen sind. Man nennt ein System von vier Geraden, von denen jede die folgende schneidet, mit sämtlichen Durchschnittspunkten dieser Geraden ein vollständiges Vierseit. Die obige Figur kann als ein solches aufgefasst werden und die vorher bewiesenen Eigenschaften derselben lassen sich wie folgt

verwenden: Ist $ABCD$ Fig. 67 ein vollständiges Vierseit, so hat man, indem man $AEF$ als ein Dreieck mit den durch $C$ gehenden Ecktransversalen $AH$, $ED$, $FB$ auffasst, durch die vorhergegangenen Entwickelungen den Satz: In jedem vollständigen Vierseit teilen die Diagonalen einander harmonisch (vergl. mit dem 131. Satz des Pappos) oder es ist

$$AG:CG = AH:CH$$
$$BG:DG = BJ:DJ$$
$$EH:FH = EJ:FJ.$$

Figur 67.




Der 139. Satz des Pappos beweist: Wenn von einem Sechseck die sechs Scheitel je drei und drei auf zwei Geraden liegen, so sind die Durchschnittspunkte seiner gegenüberliegenden Seiten in einer geraden Linie. Dieses Theorem ist nicht nur an sich selbst merkwürdig, sondern auch noch deshalb, weil man es als den ersten Keim zu dem berühmten Theorem von Pascal über das einem Kegelschnitt einbeschriebene Sechseck betrachten kann. Statt eines Systems zweier Geraden, in welche Pappos sein Sechseck einschreibt, wird in dem Theorem des Pascal (s. d.) irgend ein Kegelschnitt substituiert.

Der in der neueren Zeit von Guldin bekannt gemachte Satz, wie mittels des Schwerpunktes von Linien und Flächen der Inhalt der dadurch beschriebenen Oberflächen der Körper gefunden werde, wird von Pappos als seine Erfindung in Anspruch genommen.

Theon schrieb einen der ausgezeichnetsten und interessantesten Kommentare zu den Werken des Ptolemäos und Noten zu Euklids Elementen. Berühmter als der Vater ist die Tochter Theons, Hypatia, sowohl durch ihre hohe Gelehrsamkeit in Mathematik und Philosophie, als durch ihr tragisches Ende.[1]) Sie kommentierte den Diophant sehr gelehrt, ebenso den Apollonios.

Gegen die Mitte des 5. Jahrhunderts n. Chr. treffen wir als Haupt der platonischen Schule zu Athen den Philosophen Proklos sehr bewandert in Mathematik. Sein hauptsächlichstes Werk ist sein Kommentar zum I. Buche des Euklid, welcher wegen mancher sinnreichen Bemerkungen nicht wenig Beifall fand. Sein Nachfolger Marinus bereicherte den Euklid durch eine gute Vorrede oder Einleitung. Isidorus von Milet, ein Schüler des Proklos, von welchem wir freilich kein Werk mehr besitzen, soll 530 n. Chr. als ein vorzüglicher Geometer geglänzt haben. Dasselbe rühmt man auch, besonders in mechanischer Hinsicht, von seinem Zeitgenossen Anthemios.

Eutokios lebte zur Zeit des oströmischen Kaisers Justinian, um die Mitte des 6. Jahrhunderts. Seine Kommentare zu des Archimedes Büchern über die Kugel und den Cylinder und zu des Apollonios Kegelschnitten sind in vielen Beziehungen sehr schätzbar. Besonders gibt uns der Kommentar zum II. Buche des Archimedes über die Kugel und den Cylinder eine vollständige Geschichte des Problems der Verdoppelung des Würfels und auch die übrigen Kommentare enthalten viele geschichtliche Notizen.

[1]) Sie lebte mit dem Bischof Cyrillus von Alexandria in Feindschaft, in deren Folge sie im Jahr 415 n. Chr. von dem Pöbel auf der Strasse ergriffen, in die Kirche geschleppt und hier zerrissen wurde.

„Die Arbeiten der ebengenannten Mathematiker waren die letzten, welche die alexandrinische Schule berühmt machten. Die Künste und Wissenschaften nahmen schon ab, als Aegypten 641 n. Chr. Eigentum der Araber wurde, und der Brand der herrlichen Bibliothek der Ptolemäer zu Alexandrien, dieser kostbaren Niederlage aller Produktionen des Genius und der Bildung von 10 Jahrhunderten, wurde das Signal zu der Barbarei und der langen Finsternis, welche den menschlichen Geist umgab. Inzwischen erkannten nach einem oder zwei Jahrhunderten dieselben Araber ihre Unwissenheit an und unternahmen es selbst, die Wissenschaft wiederherzustellen. Eben sie haben teils als Text selbst, teils als Uebersetzung in ihre Sprache uns die Manuskripte überliefert, welche ihrer fanatischen Wut entgangen waren. Dieses ist aber auch beinahe die einzige Verbindlichkeit, welche wir ihnen schulden. Denn die Geometrie blieb unter ihren Händen mit Ausnahme der Berechnung sphärischer Dreiecke auf demselben Fleck stehen; in ihren Arbeiten begnügen sie sich, die griechischen Werke zu bewundern und zu kommentieren, als wenn diese die äusserste und erhabenste Grenze der Wissenschaft bezeichnet hätten.“

„Die Stockung in den Wissenschaften währte bei den Arabern und andern Nationen, nach der Zerstörung des Museums zu Alexandrien, beinahe 1000 Jahre. Erst um die Mitte des XV. Jahrhunderts, nach der allgemeinen Anregung der Wissenschaften, fand auch die Geometrie wieder Berücksichtigung. Ihre Fortschritte waren anfangs langsam, aber sie nahmen sehr bald einen Charakter von Allgemeinheit und Abstraktion an, den sie bis dahin nie gehabt hatten.“ [1])

# Die Geometrie der Inder.

„Die Entwickelung der Mathematik ist, wenn auch keine gleichmässige und stetige, so doch eine zeitlich ununterbrochene, und wir finden, wenn ein Volk die Fähigkeit und Kraft zur mathematischen Forschung verliert, ein anderes eintritt, um für die nächsten Jahrhunderte die weitere Förderung zu übernehmen. In den meisten Fällen tritt das neue Volk die geistige Erbschaft des bisher in der Wissenschaft herrschenden an und baut weiter auf dem schon gewonnenen Grunde. In der Zeit nun, als die wissenschaftliche Energie des spezifisch griechischen Intellekts erschöpft war, suchte sich die aus dem Occident vertriebene Mathematik eine Zufluchtsstätte fern im Osten, jenseits des Indus. Dort hatte bereits einige Jahrhunderte vor Chr. eine eigentümliche wissenschaftliche und litterarische Entwickelung begonnen. Die zahlreiche, in behaglichen Umständen lebende Kaste der Brahmanen schloss eine beträchtliche Zahl genialer, talentvoller und wissbegieriger Männer in sich, welche es für ihren Beruf hielten, die Praxis des bürgerlichen und geistlichen Lebens zu verbessern und zu vertiefen. Die Brahmanen haben in allen wissenschaftlichen Gebieten eine von den Griechen wesentlich verschiedene Art zu denken, sie legen weniger Wert auf die Begründung als auf das Resultat, weniger auf das Warum als auf das Wie. Was sie dadurch an Schärfe und Bestimmtheit verlieren, gewinnen sie wieder durch grössere Tiefe und Weite.“ [2])

Das Bild, welches uns die bei den Brahmanen hinter die Arithmetik und Algebra weit zurücktretende Geometrie zeigt, ist darum gänzlich verschieden von dem der Euklidischen Elemente. Hier finden wir keine Definitionen, Grund-

[1]) Chasles. — [2]) Hankel.

sätze und Reihen fest verbundener Lehrsätze, deren jeder sich auf die vorhergehenden stützt und den nachfolgenden beweist, jeder Satz steht selbständig da, wie ein Faktum. Und wenn uns die Kommentatoren Aufschluss über die Art und Weise geben, wie die Gewissheit eines Satzes dargethan werden soll, so sehen wir mit Erstaunen, wie sie nicht nach griechischer Art erst Hilfslinien ziehen und dann zahlreiche Sätze citieren, durch deren logische Verbindung jener Lehrsatz hervorgeht; vielmehr ist der Satz vom Quadrat der Hypotenuse der einzige, den sie ausdrücklich anwenden: alles andere lehrt sie die Anschauung entweder unmittelbar oder nach einer gewissen Anleitung. Alles, was ein geübter Sinn durch anhaltende Betrachtung einer Figur erkennen konnte, wurde als gewiss zugelassen.

Jene Anschauungen nach Art der Griechen zu analysieren, in einzelne Lehrsätze zu zerlegen und diese wieder auf eine kleine Anzahl trivialer Wahrheiten, welche die Griechen aus den unmittelbar gewissen Sätzen mit grossem Scharfsinn herausgelesen und als Axiome genau präzisiert hatten, zurückzuführen, kommt den Indern so wenig bei, dass sie nicht einmal das allgemeine Prinzip, welches der Anschauung zu Grunde liegt, anzudeuten für notwendig halten; mit andern Worten: ihre Axiome waren weder an Zahl begrenzt, noch überhaupt als solche erkannt. Ihre beiden wichtigsten Hilfsmittel sind das Prinzip der Kongruenz und das der Aehnlichkeit. Das erstere liegt einfach in der Anschauung, dass gleiche Konstruktionen zu derselben Figur führen. Von dem Prinzip der Kongruenz ist das der Symmetrie ein besonderer Fall, aus dem z. B. der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks von selbst folgt. Das zweite allgemeine Prinzip der geometrischen Entwickelung bei den Indern, das der Aehnlichkeit, findet in der beschränkten Form der Proportionalität der Seiten von Dreiecken, welche einen Winkel gemein und die gegenüberliegenden Seiten parallel haben, häufig Anwendung; zuweilen aber in sehr allgemeiner Fassung. Um z. B. den bei Brahmegupta vorkommenden Lehrsatz zu beweisen, dass der Halbmesser eines einem Dreieck umschriebenen Kreises gleich dem Produkt zweier Seiten dividiert durch den doppelten Perpendikel auf die Grundlinie ist, sagt ein alter Kommentator: „Lass das doppelte Perpendikel eine Sehne im Kreis sein, dessen Halbmesser die rechte Seite ist. Dann besteht die Proportion: Wenn der Halbmesser gleich der rechten Seite ist in einem Kreis, in welchem das doppelte Perpendikel eine Sehne ist, was ist der Halbmesser in einem Kreis, wo die Sehne gleich der linken Seite ist? Das Resultat ist der Halbmesser des umschriebenen Kreises.“ In dieser Stelle ist die Idee des Beweises kurz, doch klar angedeutet. Nach Art des Euklid würde zunächst bemerkt werden, dass Winkel $CAB = {}^1/_2 \angle CMB$, dass daher $\angle CAE = \angle CMB$, wenn $DE = DC$, folglich Dreieck $BMC \sim \triangle EAC$ u. s. w.

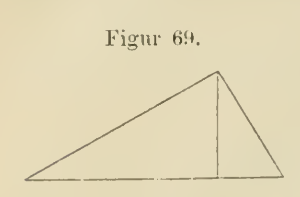
Figur 68.

Wenn die konstruktive Geometrie der Inder immer auf einer verhältnismässig niedrigen Stufe der Ausbildung stehen geblieben ist, so lag dies an dem einseitigen Festhalten der oben geschilderten Methode, welche bei zusammengesetzten Figuren ihren Dienst versagte und einer Unterstützung durch logisches Denken bedurfte.

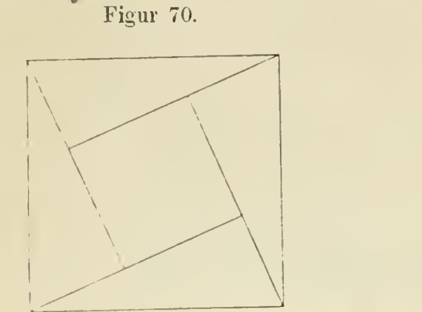
So in der Entwickelung der Geometrie nach dieser Seite hin gehemmt, wandten sie sich der Erforschung der rein metrischen Gesetze der räumlichen Grössenwelt zu, die durch Rechnung gefunden und zur Figurenberechnung verwandt werden konnte.

Die Grundlage aller messenden und rechnenden Geometrie, der Satz vom Quadrat der Hypotenuse, ist von den Indern selbständig erfunden worden, denn sie besitzen von ihm zwei durchaus natürliche, echt indische Beweise, welche die Griechen nicht kennen. Zuerst (in dem Vîjaganita des Bhâskara) beweisen sie den Satz, indem sie von der Spitze des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse fällen und die beiden so entstehenden Dreiecke mit dem ihnen ähnlichen ganzen vergleichen. Der zweite Beweis lässt das rechtwinklige Dreieck viermal in das Hypotenusenquadrat beschreiben, so dass in der Mitte ein Quadrat übrig bleibt, dessen Seite die Kathetendifferenz ist. In einer zweiten Anordnung der vier Dreiecke und

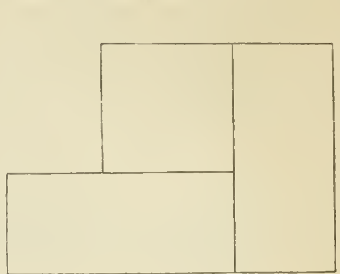
Figur 69.



Figur 70.



Figur 71.



jenes inneren Quadrats machen diese zusammen bei anderer Zerlegung die beiden Kathetenquadrate aus. „Siehe", schreibt der Verfasser neben die Figuren, ohne ein Wort weiter hinzuzufügen.[1])

Bei Durchmusterung der Culvasûtras (geometrisch-theologischen Schriften) ist ersichtlich, dass die indische Geometrie nur als ein Ableger alexandrinischer und zwar heronischer Geometrie anzusehen ist. Da ist es die Anwendung der Seilspannung bei praktisch-feldmesserischen Operationen, da ist es die Benutzung des pythagoräischen Lehrsatzes, und zwar vom Rechteck ausgehend, da ist es die Figur des Gnomon, da ist der Näherungswert $\pi = 3$, welche einen Zusammenhang der beiderseitigen Entwickelungsweisen der Geometrie über die blosse Möglichkeit weit erheben. Noch deutlicher tritt dieser Zusammenhang hervor bei Durchmusterung der Schriften, durch die wir einen Einblick in die Geometrie der Inder bekommen, der Werke des Brahmegupta, Aryabhatta und Bhâskara, welche A. Colebrooke aus dem Sanskrit ins Englische übersetzt hat. Dieselben handeln über Arithmetik, Algebra und Geometrie.

Die dreiseitige Pyramide ist bei Aryabhatta (geb. 476 n. Chr.) das (falsche) halbe Produkt aus der Grundfläche in die Höhe. Der Kugelinhalt ist bei ihm Produkt der Fläche des grössten Kreises in die Quadratwurzel derselben, was wiederum falsch ist. Daneben weiss aber Aryabhatta, dass $\pi = 3{,}1416$ ist. Die Berechnung des Paralleltrapezes wird genau so gelehrt wie im Handbuch des Ahmes.

[1]) Nach Hankel.

Man hat allgemein geglaubt, in dem geometrischen Teil der Werke des Brahmegupta und Bhâskara nur Elemente der Geometrie zu sehen oder wenigstens die elementaren und ersten Sätze, auf denen die ganze Wissenschaft der Hindus beruht. Chasles ist aber durch eine genaue Untersuchung des geometrischen Teils der indischen Werke zu der Erkenntnis gekommen, dass besonders das Werk des Brahmegupta (geb. 598 n. Chr.) von einer einzigen geometrischen Theorie handelt und zwar von der des Vierecks, welches einem Kreis einbeschrieben ist.

Das Werk des Bhâskara (geb. 1114 n. Chr.) ist nur eine sehr unvollkommene Nachahmung von dem des Brahmegupta. Man findet darin noch einige neue Untersuchungen über das rechtwinklige Dreieck, einen merkwürdigen Näherungswert für die Fläche des Kreises als Funktion des Durchmessers, den Wert der Seiten der sieben regelmässigen einbeschriebenen Polygone als Funktionen des Radius, und eine Formel für die näherungsweise Berechnung der Sehne als Funktion des Radius und umgekehrt. Aber die wichtigsten Sätze des Brahmegupta, die sich auf das einem Kreis einschreibbare Viereck beziehen, sind darin ausgelassen oder als ungenaue aufgeführt. Dies zeigt, dass Bhâskara sie nicht verstanden hat.

Dieser Umstand und die verschiedenen Kommentare scheinen uns zu beweisen, dass seit Brahmegupta die Wissenschaften in Indien in Verfall geraten sind und dass das Werk dieses Geometers aufgehört hat, verstanden zu werden.

Die Geometrie des Brahmegupta ist eine rechnende Geometrie, eine Sammlung von Vorschriften, Raumgebilde zu berechnen, wie bei Heron von Alexandrien. Alle Sätze reduzieren sich auf sehr kurze Aussprüche, die von keinem Beweis begleitet sind. Sie sind ganz allgemein dargestellt, ohne Hilfe irgend einer Figur und ohne dass im Text selbst eine Zahlenanwendung gemacht wäre.

„Nichts kann verschiedener sein als die Art und Weise, wie die Griechen und Inder die Geometrie behandelten; im Sinne der Griechen hat es in Indien nie eine Geometrie gegeben. Was hier unter dem Titel ebene Figuren mitgeteilt wird, trägt noch ganz den Charakter vorgriechischer Forschung, wie wir sie früher bezeichnet haben und wie sie sich in Indien am längsten erhalten hat. Die ganze Behandlungsweise ist so originell, dass an keinen andern Einfluss als einen von gleicher Richtung gedacht werden kann, und wenn uns auch die Behandlung der Wissenschaften am Nil und Euphrat vielleicht für immer verloren ist, so haben wir doch hier Reste, welche, wenn auch schon auf einer höheren Stufe, uns doch in den Geist einer früheren Zeit zurückführen können. Die Grundlage aller Betrachtungen und aller Rechnungen ist der Dreisatz oder die Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke und dann der pythagoräische Satz. Von der Lehre der Aehnlichkeit ist nirgends die Rede, von der Gleichheit der entsprechenden Winkel als notwendige Bedingung wird nichts erwähnt, der Dreisatz wird überhaupt nur in rechtwinkligen Dreiecken, welche den spitzen Winkel gemeinschaftlich haben, angewandt. Diese Anwendung muss sehr alt sein und wird als eine Sache betrachtet, welche sich von selbst versteht, weshalb auch gar keine Untersuchungen darüber vorausgeschickt werden. In diesem rohen Zustand ist die Lehre von der Aehnlichkeit eine Ueberlieferung aus den ersten Zeiten der geistigen Regung bei den Menschen; sie bildete einen jener Erfahrungssätze, welche von Generation zu Generation sich fortgepflanzt haben, deren anerkannte Wahrheit niemand bezweifelte oder besser zu begründen suchte. Hier zeigt sich, wie notwendig es ist, dass der Kulturgang eines Volkes gewaltsam unterbrochen werde, wenn seine Ideen stereotyp geworden sind, wie seine Kultur an ein anderes Volk übertragen werden muss, welches sie frei auffasst und mit ungebeugter Kraft nach einer neuen Richtung fortführt, wie dies in

Griechenland der Fall gewesen ist. Solche Ereignisse müssen eintreten; sie sind eine notwendige Folge des steigenden Weltprozesses, dem steten Streben nach ungehemmter Entwickelung. Ebenso steht der pythagoräische Satz da; er ist nicht weniger alt; an einen Beweis desselben wird nicht gedacht. Eigentlich ist er auch bei den Indern nur ein Zahlensatz, und sie kannten nur die Regel, zwei Zahlen zu finden, deren Quadrate zusammen wieder ein Quadrat sind. Brahmegupta gibt in seinem 31. Satz die Vorschrift: wenn $m$ und $n$ zwei willkürliche Zahlen sind, so ist die Senkrechte $2m \cdot n$ und die Basis $m^2 - n^2$. Eines Beweises bedurfte es nicht; für zwei angenommene Zahlen durfte man nur die Rechnung machen, um sich von der Richtigkeit der Vorschrift zu überzeugen. Ein derartiges Verfahren ist um so natürlicher, als die Inder nie daran dachten, Eigenschaften der Figuren aufzusuchen, und nur nach Grössenbestimmungen forschten, während die Griechen gerade umgekehrt diese Eigenschaften allein als Ziel ihrer Bestrebungen kannten und das Metrische vernachlässigten." [1])

Eine geringe Anzahl von Sätzen aus der Geometrie des Brahmegupta ist verständlich und ihre Aussprache enthält alle Teile, welche zu einem vollständigen Satz gehören. Die andern jedoch sind sehr unvollständig ausgesprochen und erwähnen gar nicht bemerkenswerte Bedingungen der Aufgabe, deren Kenntnis notwendig ist. Der Zweck dieser Sätze ist nach Chasles die Auflösung folgender vier Aufgaben gewesen:

1) Als Funktion der drei Seiten eines Dreiecks seine Fläche und den Radius des umschriebenen Kreises zu finden.
2) Ein Dreieck zu konstruieren, in welchem diese Fläche und dieser Radius durch rationale Zahlen ausgedrückt sind, indem die Seiten selbst rationale Zahlen sind.
3) Wenn ein Viereck einem Kreis einbeschrieben ist, als Funktionen seiner Seiten folgende Stücke zu bestimmen: seine Fläche, seine Diagonalen, seine Perpendikulären, die Segmente, welche diese Linien durch ihren gegenseitigen Durchschnitt aufeinander bilden, und den Durchmesser des Kreises.
4) Endlich ein Viereck zu konstruieren, das einem Kreis einbeschrieben werden kann und in dem alle diese Stücke, seine Fläche, seine Diagonalen, seine Perpendikulären, ihre Segmente und der Durchmesser des Kreises in rationalen Zahlen ausgedrückt sind.

Diese vier Aufgaben finden sich vollständig aufgelöst in den 18 ersten Sätzen des Werkes von Brahmegupta. Zu Anfang heisst es, die Fläche des Dreiecks werde in rohem Ueberschlag gewonnen als Produkt der Hälften von je zwei Gegenseiten. Das ist offenbar die alte ägyptisch-heronische Formel, deren Ungenauigkeit man zwar kannte, die aber aus einer gewissen Achtung vor ihrem Alter beibehalten wurde. Nur dadurch kann man sich die Aufnahme dieser Vorschrift erklären, die uns sonst einen ganz schlechten Begriff von der Mathematik der Inder geben würde; sie gilt als genaue Bestimmung für das Rechteck, gibt aber, auf andere Figuren angewandt, nicht einmal eine grobe Annäherung. Die Anwendung auf das Dreieck wird dadurch vermittelt, dass man die der Grundlinie gegenüberliegende Seite des Vierecks $= 0$ setzt. Die genaue Vorschrift, die Fläche des Dreiecks aus der Grundlinie und Höhe zu berechnen, war übrigens bekannt; wenn sie auch hier nicht gegeben wird, so liegt sie doch so sehr am Tage, dass man ihre Kenntnis dem Verfasser nicht absprechen kann, wenn man ihn nicht ganz unfähig für jede mathematische Untersuchung erklären will. Der gleiche Paragraph gibt die genaue Fläche des

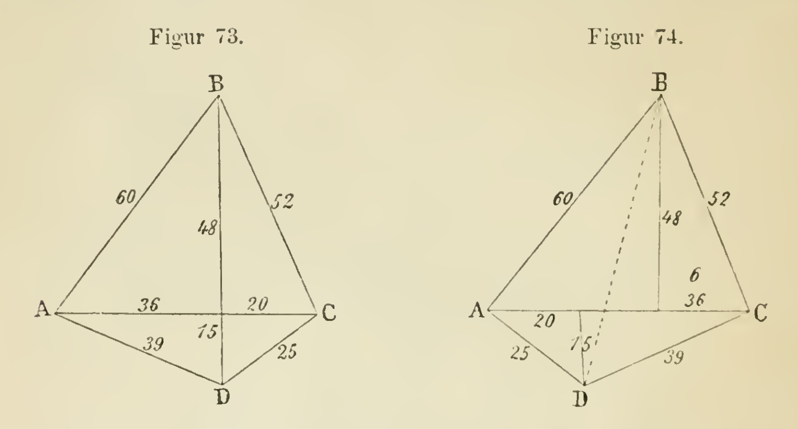
[1]) Arneth.

Dreiecks aus den drei Seiten nach der heronischen Formel. Als genau gilt auch die Formel für das Sehnenviereck $F\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, wo $s = {}^1/_2(a+b+c+d)$ bedeutet und $a$, $b$, $c$, $d$ die Vierecksseiten sind. In Bezug auf das Viereck wird von Brahmegupta keinerlei Beschränkung gemacht, obschon dies sonst, wo es nötig ist, geschieht, so dass man nicht zweifeln kann (bemerkt Arneth), er habe obige Vorschrift für alle Vierecke verstanden. Setzt man die halbe Summe aller Seiten viermal hin und zählt einzeln genommen die Seiten davon ab, so gibt die Quadratwurzel aus dem Produkt der Reste den genauen Flächeninhalt des Dreiecks und Vierecks. Für das Dreieck, welches als Viereck betrachtet wird, dessen eine Seite $= 0$ ist, ist die Vorschrift richtig; auf das Viereck angewandt, gilt sie nur für das Kreisviereck. „Hier lassen sich viele Mutmassungen anbringen über den Scharfsinn und die Gewandtheit des Geometers, welcher diese Regel aufgefunden, die ausserdem höchst wahrscheinlich schon früheren Werken entnommen war. Die Sache ist nicht so schwer zu ermitteln, wenn man bedenkt, dass die Inder sich immer Figuren zu konstruieren suchten, deren Teile rationale Zahlen sind, und dass sie mit der Zahlenrechnung äusserst vertraut waren. An den Dreiecken und Vierecken aus solchen rationalen Zahlen gebildet, stellten sie nun ihre Betrachtungen an und machten Versuche verschiedener Art, die Figuren der Rechnung zu unterwerfen. Sobald man einmal auf die Idee gekommen war, die Figuren durch Quadrate auszumessen, war die erste Figur, welche sich der Ausmessung darbot, das Quadrat selbst, und die Begriffe Wurzel und Quadrat gehören zu denen, zu welchen man am frühesten gelangt war. Als nächste Figur stellte sich das Rechteck dar, und nichts war einfacher als dessen Zerlegung in Quadrate und die Erfindung der Vorschrift zur Berechnung der Fläche: Multipliziere die eine Seite mit ihrer anliegenden, so hast du die Fläche. Die Praxis kannte zuerst nur Rechtecke, aber diese waren in den seltensten Fällen genaue Rechtecke und hier stellte sich die Unzulänglichkeit der Regel sogleich heraus; man war daher genötigt, etwas anderes zu erfinden. Die nächste Gedankenfolge ist sehr leicht zu erraten. Wenn man etwa das Viereck $ABCD$ hatte, in welchem $AB$ etwas verschieden von $CD$ und ebenso $AD$ verschieden von $BC$ war, so dachte man ganz natürlich das Viereck auf ein Rechteck zurückzubringen, wenn man diese Unterschiede ausglich und von $CD$ etwas abnahm und dem $AB$ zusetzte, so dass beide gleich wurden; dieselbe Betrachtung wiederholte sich für die beiden andern Seiten und so kam man auf die Vorschrift, die halbe Summe der Seiten und Gegenseiten miteinander zu multiplizieren, oder die Regel aufzufinden, welche Brahmegupta angegeben hat, die sich beim wahren Rechteck ausserdem auch vollkommen bestätigte. Gewiss war ursprünglich die Vorschrift auch nur für solche Vierecke bestimmt, welche vom Rechteck wenig verschieden waren, und wurde später nur ungeschickt angewandt. Eine ähnliche Vorstellung lag nun ganz naturgemäss in derselben Richtung. Nimmt man an, dass die Seiten eine grössere Abweichung vom Rechteck zeigten, so war eine Ausgleichung nötig, welche sich auf alle Seiten gleichmässig erstreckte. Statt die halbe Summe der gegenüberliegenden Seiten zu nehmen, nahm man die halbe Summe aller Seiten; diese musste aber in eine gleiche Verbindung mit allen Seiten gebracht werden, was am einfachsten dadurch geschah, dass man nun jede Seite von dieser halben Summe hinwegnahm; das Produkt dieser Reste, aus vier statt aus zwei Faktoren bestehend, musste das Produkt zweier Flächenräume sein, die man als gleich annahm, und also durch die Wurzel die Fläche erhalten wurde. Die Rechnung

Figur 72.

zeigte sich sogleich richtig, wenn man die Anwendung auf das Rechteck machte; sie zeigte sich weiter richtig in Bezug auf die Vierecke aus rationalen Zahlen.

Mit einem allgemeinen Viereck hätte Brahmegupta wenig anzufangen gewusst, er bedient sich deswegen nur solcher Vierecke, deren Teile ganze rationale Zahlen sind; zu diesen gelangt er aber auf folgende Weise. Man bilde zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten ganze Zahlen sind. Die kleinsten dieser Art haben die Seiten 3, 4, 5 und 5, 12, 13; von jedem derselben leite man zwei andere ab, in der Art, dass man die Seiten des einen einzeln mit den Katheten des andern vervielfacht; hierdurch entstehen vier rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten ganze Zahlen sind und von welchen die Hypotenuse, Senkrechte und Basis der Reihe nach sind: 60, 48, 36; 52, 48, 20; 39, 15, 36; 25, 15, 20. Nun hat das erste und zweite Dreieck die gleiche Seite 48, sie lassen sich daher zu einem Dreieck vereinigen, welches die Seiten 60, 52, die Grundlinie $36 + 20 = 56$ und die Höhe 48 hat, siehe Figur 73; das dritte und vierte Dreieck können durch die gleiche Seite 15 angeschlossen werden und bilden alsdann ein Dreieck mit den Seiten 30 und 25, der Grundlinie $20 + 36 = 56$ und der Höhe 15. Beide Dreiecke haben die Grundlinie 56, durch welche sie zu einem Viereck auf zwei verschiedene



Figur 73. Figur 74.

Arten verbunden werden können, einmal indem man die gleichen und dann die ungleichen Abschnitte aneinander legt. Im ersten Fall entsteht ein Viereck, in welchem sich die Diagonalen unter rechten Winkeln schneiden; im andern sind die an der gemeinschaftlichen Grundlinie liegenden Winkel rechte Winkel; in beiden Fällen machen die einander gegenüberliegenden Winkel zusammen zwei Rechte aus, weshalb die Vierecke Kreisvierecke oder Antiparallelogramme sind. An solchen Vierecken sind nun alle Vorschriften abgeleitet, welche Brahmegupta gibt, bei dem zweiten (Figur 74) ist noch zu bemerken, dass, weil $A$ und $C$ rechte Winkel sind, $BD$ der Durchmesser des Kreises ist, welcher über die vier Eckpunkte geht.

Wenn man nun diesen Figuren einige Aufmerksamkeit widmet, so wird man leicht erkennen, wie die Inder, ohne grosse Geometer zu sein, folgende Sätze erfinden konnten. Man vervielfache die Seiten, welche in den Endpunkten mit der Diagonale zusammentreffen, und nehme die Summe der Produkte, ebenso nehme man die Summe der Produkte der Seiten, welche auf einerlei Seite mit derselben Diagonalen liegen, und teile die erste Summe durch die zweite; den Quotienten vervielfache man mit der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten und ziehe aus dem Produkt die Wurzel, so erhält man die Diagonale. Z. B. in Figur 74:

$$60 \cdot 52 + 25 \cdot 39 = 4095$$
und
$$60 \cdot 25 + 52 \cdot 39 = 3528$$
$$60 \cdot 39 + 25 \cdot 25 = 3640$$
daher
$$\frac{4095 \cdot 3640}{3528} = 65 \cdot 65$$
also
$$BD = \sqrt{65 \cdot 65} = 65.$$

Die Summe der Produkte aus den Gegenseiten ist gleich dem Produkt der Diagonalen. — Im 27. Satz lehrt Brahmegupta den Radius des einem Kreis einbeschriebenen Dreiecks finden: Man teile das Produkt der beiden Seiten durch die doppelte Höhe. Hier hätten auf dem gewöhnlichen Wege zwei getrennte Dreiecke verglichen werden müssen; der Kommentator Chaturveda weiss sich hier nicht anders zu helfen, als dass er die beiden Dreiecke übereinander rückt und dann erst die Proportion aufstellt, dabei aber bemerkt, dass der Satz seine Entstehung beim Viereck habe. In der That sieht man augenblicklich, dass, mit Rücksicht auf die Entstehung dieser Zahlen

$$\frac{60 \cdot 52}{48} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 13}{4 \cdot 12} = 5 \cdot 13 = 65$$

oder auch

$$\frac{25 \cdot 39}{15} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 13}{3 \cdot 5} = 5 \cdot 13 = 65.$$

Auf gleiche Weise fliessen aus dieser Darstellung noch andere Sätze.“ [1])

Weiter lehrt Brahmegupta in der 22. Regel, genau wie Heron, aus den Seiten eines Dreiecks die Abschnitte finden, welche eine gezogene Höhe auf die Grundlinie bildet.

Die vier folgenden Sätze beziehen sich auf den Kreis:

1) Ausdruck für die Peripherie und Fläche des Kreises als Funktion des Durchmessers. Ist $D$ der Durchmesser und $R$ der Radius, so nimmt man für die Praxis die Peripherie $= 3D$ (bei genauen Messungen aber gilt für $\pi = \sqrt{10}$), und die Fläche $= 3R^2$ (bei genauen Messungen $= \sqrt{10 R^4}$). Das Verhältnis $1:3$ ist offenbar der Erfahrung entnommen; wie das andere $1:\sqrt{10}$ $(= 1:3{,}162)$ entstanden ist, darüber wird nirgends Aufschluss gegeben.

2) In einem Kreis ist die halbe Sehne gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der beiden Segmente des senkrechten Durchmessers.

3) Der Pfeil (d. i. das kleinere Segment) ist gleich die Hälfte der Differenz zwischen dem Durchmesser und der Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate des Durchmessers und der Sehne. „Wenn die Erosion [2]) von beiden Durchmessern abgezogen wird, so geben die Reste, durch die Erosion multipliziert und durch die Summe dieser Reste dividiert, die beiden Pfeile.“

4) In einem Kreis ist das Quadrat der Sehne, dividiert durch das Vierfache des einen Segments, plus diesem Segment, gleich dem Durchmesser.

Diese 23 Sätze bilden die IV. Sektion. Die V. Sektion gibt das Mass eines Prismas und einer Pyramide und eine Methode für das Praktische, einen Körper näherungsweise auszumessen. In den Sektionen VI—VIII gibt der Verfasser Regeln an, um Haufen Steine, Stücke Holz und Haufen Getreide näherungs-

[1]) Nach Arneth. — [2]) Wenn zwei Kreise sich schneiden, so haben sie eine gemeinschaftliche Sehne. Die Gerade, welche aus den beiden Pfeilen besteht, die dieser Sehne in beiden Kreisen entsprechen, heisst Erosion.

weise zu messen. In Sektion IX nimmt der Verfasser ein Licht an, welches auf einem vertikalen Fusse steht, und einen Gnomon, welcher ein ebenfalls senkrechter Stab ist, und löst folgende zwei Aufgaben:

1) Wenn man die Höhe des Lichts und die des Gnomons und die Entfernung zwischen dem Fusspunkt des Lichts und dem des Gnomons kennt, den Schatten zu finden, der durch den Gnomon geworfen wird.

2) Die Höhe des Lichts zu finden, wenn man die Schatten kennt, welche ein Gnomon wirft, nachdem dieser an zwei verschiedenen Stellen aufgerichtet ist. (Auch dieses Verfahren ist heronisch.)

Dieses sind die Sätze, welche den geometrischen Teil des Werkes von Brahmegupta ausmachen.

Die Inder gebrauchten bei ihren mathematischen Spekulationen untermischt Algebra und Geometrie. Die Algebra wandten sie zur Abkürzung und Erleichterung des Beweises ihrer geometrischen Sätze an, und die Geometrie zum Beweis ihrer Regeln der Algebra und zur Versinnlichung der Resultate der Algebra durch Figuren. Wir finden Beispiele dieser Operationsart an mehreren Stellen bei Bhâskara und in den Werken der Araber, welche diese Verschmelzung der Algebra mit der Geometrie von den Indern angenommen haben.

Die Geometrie des Bhâskara Acharya teilt Chasles in fünf Teile: Die drei ersten beziehen sich auf das Dreieck im allgemeinen, auf das rechtwinklige Dreieck und auf das Viereck; der vierte enthält einige Sätze über den Kreis und in dem fünften sind die Regeln für die Ausmessung der Volumina und das Kapitel über die Anwendung des Gnomons.

## I. Sätze über das Dreieck.

1) Theorem vom Quadrat der Hypotenuse.

2) Ausdruck der Segmente, welche auf der Basis eines Dreiecks durch das Perpendikel gebildet werden, und Ausdruck für das Perpendikel.

3) Die Fläche eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Produkts aus Grundlinie und Höhe.

4) Formel, welche die Fläche des Dreiecks als Funktion der Seiten gibt.

## II. Ueber das rechtwinklige Dreieck.

1) Regeln zur Bildung eines rechtwinkligen Dreiecks in rationalen Zahlen: a. wenn eine Kathete, b. wenn die Hypotenuse gegeben ist.

2) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von dem man eine Kathete kennt und die Summe oder Differenz der Hypotenuse und der andern Kathete.

3) Regel zur Bestimmung eines Punktes auf einer Kathete des rechtwinkligen Dreiecks, für welchen die Summe der Entfernungen von den beiden Endpunkten der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Katheten ist.

4) Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, von dem man die Hypotenuse und die Summe oder Differenz der beiden Katheten kennt.

Unter den Beispielen sind folgende: Ein Bambusrohr 32 Fuss hoch wurde vom Wind an einer Stelle gebrochen und die Spitze erreichte in 16 Fuss vom Stamm den Boden. Sage, Mathematiker, wie hoch über dem Boden wurde es abgebrochen? Die Regel gibt für die Stücke des Rohres:

$$\frac{1}{2}\left(32 + \frac{16^2}{32}\right) \text{ und } \frac{1}{2}\left(32 - \frac{16^2}{32}\right) \text{ oder } 20 \text{ und } 12.$$

In einem See ragte die Spitze einer Lotusknospe $^1/_2$ Fuss über das Wasser empor; getrieben vom Wind, neigte sie sich gegen das Wasser und verschwand in einer Entfernung von zwei Fuss von ihrem früheren Ort. Berechne schnell, Mathematiker, die Tiefe des Wassers. Eine kleine Regel, welche hierauf folgt, bezieht sich auf zwei Bambusstäbe, welche in einiger Entfernung von einander senkrecht im Boden stehen. Denkt man sich die beiden Endpunkte mit den Fusspunkten gegenseitig verbunden, so durchschneiden sich die Verbindungslinien irgendwo; man soll nun die Senkrechte des Durchschnittspunkts und die Abschnitte finden, in welche die Entfernung durch sie geteilt wird. Sind $m$ und $n$ die Höhen der Stäbe und $a$ die Entfernung beider, so wird angegeben, dass die Höhe $h = \frac{m \cdot n}{m+n}$ und der Abschnitt von $m = \frac{am}{m+n}$ und der andere $\frac{an}{m+n}$ ist. Um diese Vorschrift zu finden, mussten zuerst die Abschnitte durch die Höhe ausgedrückt und beide Ausdrücke zusammengezählt werden. Die gleiche Rechnung kommt schon bei Brahmegupta vor, bei der Bestimmung der Höhe des Dreiecks, welches durch die Verlängerung zweier gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks entsteht.

Figur 75.

## III. Sätze über das Viereck.

1) Die halbe Summe der Seiten wird viermal geschrieben, einzeln zieht man davon die Seiten ab und bildet das Produkt aus den Resten. Die Quadratwurzel aus diesem Produkt ist die Fläche, ungenau beim Viereck, aber, wie bekannt, genau beim Dreieck. (Dieses ist die Formel des Brahmegupta, welche Bhâskara kopiert hat, ohne sie verstanden zu haben und ohne zu bemerken, dass darin von einem Viereck, das einem Kreis einbeschrieben ist, die Rede ist.)

2) In dem Rhombus ist die Fläche gleich dem halben Produkt der beiden Diagonalen. Die Fläche des Rechtecks ist das Produkt aus Grundlinie und Höhe.

3) In dem Viereck, dessen beide Perpendikel gleich sind, ist die Fläche gleich dem Produkt aus der halben Summe der beiden Bases in das Perpendikel.

4) In dem Rhombus ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich dem vierfachen Quadrat der Seite.

5) Formeln für die Segmente, welche die Diagonalen eines Vierecks, dessen Flanken senkrecht auf der Basis stehen, aufeinander abschneiden; und Ausdruck für das Perpendikel, welches von dem Durchschnittspunkt der Diagonalen auf die Basis gefällt wird (s. obige Aufgabe in Bezug auf die zwei Bambusstäbe).

6) Wenn man die Seiten des Vierecks und die eine seiner Diagonalen kennt, die andere Diagonale, die Perpendikel des Vierecks und seine Fläche zu finden. — Die Fläche ist die Summe der Flächen der beiden Dreiecke, welche die bekannte Diagonale zur Basis haben.

7) Regel für die Bildung eines Vierecks aus vier gegebenen Seiten, in welchem die beiden Perpendikel gleich sind.

8) Regel für die Auffindung der Diagonalen eines Vierecks.

9) Berechnung der Segmente, welche die Diagonalen, die Perpendikel und die verlängerten Seiten eines Vierecks aufeinander bilden.

Die übrigen Sätze aus der Lilavati oder Rechenkunst des Bhâskara, welche hier noch zu erwähnen sind, sind von bedeutend grösserem Wert und zeigen, dass die Inder mit der Berechnung des Kreises, seiner Sehnen, Abschnitte, Polygone etc. wohl vertraut waren. Besonders bemerkenswert sind folgende:

1) „Wenn der Durchmesser des Kreises $D$ ist, so ist der Ausdruck $D \cdot \frac{3927}{1250}$ beinahe die Peripherie; $D \cdot \frac{22}{7}$ ist die Annäherung, welche man in der Praxis anwendet.“ — Es wurde schon früher bemerkt, dass in Indien nach einer älteren Tradition $\pi = 3$ oder genauer $\pi = \sqrt{10}$ sei. Uebrigens scheint letzteres Verhältnis, eine empirische Formel, Indien von den ältesten Zeiten an eigentümlich zu sein. Doch kannte schon Aryabhatta das Verhältnis 10000 : 31416; wie man zu diesem überraschend genauen Verhältnis gelangt ist, lehrt uns der Kommentar zur Lilavati: Man berechnete nach dem Satze

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$$

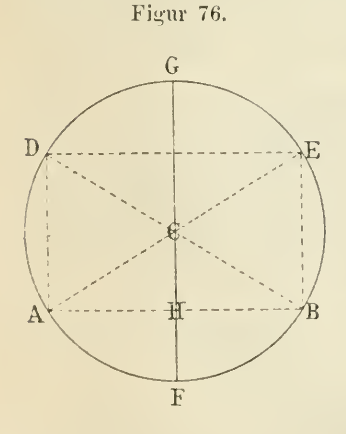
durch welchen die Seite $s_{2n}$ eines $2_n$Ecks von der $s_n$ eines $n$Ecks abhängt, aus dem Umfang des Sechsecks aufeinanderfolgend den Umfang des 12-, 24-, 48-, 96-, 192-, 384-Ecks. Der des letzteren ist, den Durchmesser = 100 gesetzt, $\sqrt{98694} = 314{,}16$ und das oben erwähnte Verhältnis $\frac{3927}{1250} = 3{,}14160$ ist dasselbe. Dies ist die Methode des Archimedes und später des Ptolemäos, von der die älteren indischen Geometer nichts wussten und die ihnen (nach Arneth) höchst wahrscheinlich durch die griechische Geometrie zugekommen ist.

2) „Der vierte Teil des Durchmessers, multipliziert durch die Peripherie, gibt die Fläche des Kreises. Diese Fläche multipliziert durch 4, gibt die Oberfläche der Kugel. Diese Oberfläche multipliziert mit dem Durchmesser und dividiert durch 6, gibt den genauen Wert des Volumens der Kugel.“

Auch die Berechnung der einbeschriebenen regulären Polygone, woran sich von selbst die Quadratur des Kreises knüpft, haben die Inder ausgeführt, wofür folgender Satz als Beispiel gelten mag:

3) In dem Kreis, dessen Durchmesser 2000 ist, sind die Seiten des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks und der andern regulären Polygone folgende:

Figur 76.




für das Dreieck $1732\frac{1}{20}$, für das Viereck $1414\frac{13}{60}$, für das Fünfeck $1175\frac{17}{30}$, für das Sechseck 1000, für das Siebeneck $867\frac{7}{12}$, für das Achteck $765\frac{11}{30}$ und für das Neuneck $683\frac{17}{20}$.

Das Verhältnis zwischen der Sehne $AB = s$, ihrer Pfeilhöhe $FH = h$ und dem Durchmesser $GF = d$, wird in der Lilavati folgendermassen berechnet: Man ziehe $BE \perp AB$ und den Durchmesser $AE$, dann ist

$$AE^2 - AB^2 = BE^2,$$

also $d^2 - s^2 = (d - 2h)^2$, also $2h = d - \sqrt{d^2 - s^2}$;

ferner
$$AC^2 - CH^2 = AH^2,$$

also
$$r^2 - (r - h)^2 = \left(\frac{1}{2} s\right)^2 \text{ oder } s = 2\sqrt{h(d - h)}.$$

Merkwürdig sind hier noch zwei, wie es scheint, empirische Formeln, welche die Bestimmung haben, die Sehne aus dem Bogen, und umgekehrt den Bogen

aus der Sehne zu berechnen. Ist $s$ die Sehne, $u$ der Umfang, $b$ der Bogen und $d$ der Durchmesser, so ist

$$s = \frac{4d(u-b)b}{{}^5/_4 u^2 - (u-b)b} \text{ und } b = \frac{u}{2} - u\sqrt{\frac{d-s}{s+4d}}.$$

Diese Formeln geben die gesuchten Grössen zum Teil auf zwei Dezimalstellen genau und gewähren also bloss eine Annäherung, sie sind aber insofern wichtig, als sie anfänglich dazu gedient haben mögen, die Sinustafeln, die keine grosse Genauigkeit hatten, zu berechnen.

Die folgenden Kapitel sind klein und bieten nichts Besonderes dar; sie enthalten die Körperberechnungen zu praktischen Zwecken in derselben Weise, wie bei Brahmegupta.

Das 11. Kapitel hat die Ueberschrift Schatten eines Gnomon. Ist $g$ die Höhe des Gnomon, $e$ die Höhe des leuchtenden Punktes, $d$ die Entfernung der Fusspunkte des Lichts und des Gnomons, $s$ die Länge des Schattens, so hat man zwischen diesen Grössen die Relation:

$$s \cdot e = g \cdot d + g \cdot s,$$

was sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ergibt. Je nachdem man nun eine der Grössen $s$, $e$, $d$ als unbekannt betrachtet, erhält man hieraus eine Vorschrift zur Berechnung derselben aus den übrigen Grössen; diese Vorschriften werden hier mitgeteilt. Eine zusammengesetztere Aufgabe, welche gleich im Anfang vorkommt, ist folgende: Für denselben Gnomon hat man, bei verschieden hohem Stande des Lichts, oder auch bei gleichem Stande, aber in verschiedenen Entfernungen von demselben, zwei Schatten und zwei Hypotenusen; man kennt den Unterschied der Schatten $d$, den Unterschied der Hypotenusen $u$ und den Gnomon $g$ und soll daraus die Schatten einzeln finden. Die Vorschrift ist für den grösseren und kleinen Schatten:

$$d + u\sqrt{\frac{576}{d^2 - u^2} + 1};$$

hieraus geht hervor, dass $g = 12$ angenommen worden ist. Ebenso wird folgende Aufgabe gelöst. In verschiedene Entfernungen von dem Licht wird der Gnomon gesetzt und die Schatten $S$ und $s$ gemessen, ebenso wird die Entfernung $d$ der Standpunkte gemessen; man soll die Entfernung des Fusspunktes des Lichts von den beiden Standpunkten finden. Diese werden angegeben:

$$\frac{S(d+S-s)}{S-s} \text{ und } \frac{s(d+S-s)}{S-s}.$$

Dies sind die Aufgaben über den Gnomon, und das Kapitel schliesst mit folgender Betrachtung:

„Wie das Wesen, welches das Gemüt seiner Verehrer von seinen Leiden erhebt, und welches die einzige Ursache der Schöpfung dieser Welt ist, das Ganze durchdringt und umfasst in seinen verschiedenen Erscheinungen, als Welten, Paradiese, Berge, Flüsse, Götter, Teufel, Menschen, Bäume und Städte, so ist diese Sammlung von Vorschriften durchdrungen und umfasst von der Regel der drei Glieder. Wenn aber dieses die einfache Grundlage ist, warum wird sie mit so vieler Mühe und von vielen Schriftstellern so weitläufig auseinandergesetzt? — Die Antwort ist: Was immer berechnet wird in der Algebra oder in der Arithmetik vermittelst eines Multiplikators und eines Divisors, wird von den scharfsinnigen Gelehrten als die Regel der drei Glieder erkannt werden. Dennoch ist sie von weisen Lehrern in unterschiedene und mannigfaltige Regeln

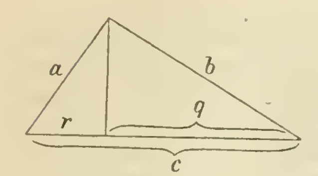
getrennt worden; sie lehrten diese leichten Veränderungen, indem sie dachten, dadurch auch die Bildung der weniger Begabten, wie wir sind, zu heben."

Ferner verdienen einige neu hinzugekommene Aufgaben, welche sich in dem Vija Ganita (oder Algebra) genannten Werke des Bhâskara finden, unsere Aufmerksamkeit. Es wird verlangt, die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden, wenn neben der Summe derselben 1) das Produkt der beiden Katheten, 2) das Produkt der drei Seiten gegeben ist. Bhâskara löst die erste Aufgabe in folgendem Sinne: Gegeben ist das Produkt der beiden Katheten $= ab = p$ und $a + b + c = s$.

$$2ab = 2p = (a+b)^2 - (a^2+b^2) = (a+b)^2 - q^2 = (a+b+c)(a+b-c).$$

Da nun $a + b + c = s$ gegeben ist, so folgt

$$a + b - c = \frac{2p}{s} \text{ und } 2c = s - \frac{2p}{s}, \; c = \frac{s^2 - 2p}{2s}, \; a + b = \frac{s^2 + 2p}{2s}.$$



Figur 77.

Die Katheten findet man noch einzeln, indem von

$$(a+b)^2 = \left(\frac{s^2+2p}{2s}\right)^2$$

der Wert $4ab = 4p$ abgezogen wird, so entsteht

$$(a-b)^2 = \frac{s^4 - 12ps^2 + 4p^2}{4s^2}$$

und daraus $a - b$, welches in Gemeinschaft mit $a + b$ die Katheten liefert. Zahlenbeispiel:

$$s = 176, \; p = 2640,$$

dann ist

$$c = \frac{176 \cdot 176 - 2 \cdot 2640}{2 \cdot 176} = 73;$$

$$a + b = \frac{176 \cdot 176 + 2 \cdot 2640}{2 \cdot 176} = 103;$$

$$a - b = \sqrt{\frac{176^4 - 12 \cdot 2640 \cdot 176^2 + 4 \cdot 2640^2}{4 \cdot 176^2}} = 7,$$

woraus $a = 55$, $b = 48$. In der zweiten Aufgabe ist gegeben $a + b + c = s$ und $abc = p$. Aus $s - c = a + b$ erhält man:

$$s^2 - 2sc + c^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + \frac{2p}{c},$$

mithin ist

$$s^2 - 2sc = \frac{2p}{c} \text{ und } 2sc^2 - s^2c = -2p.$$

Daraus findet man:

$$c = \frac{s}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{4}\right)^2 - \frac{p}{s}},$$

daraus:

$$s - c = a + b \text{ und } \frac{4p}{c} = 4ab,$$

und nun ist es wieder leicht, $a - b$ und endlich die Katheten zu finden.

Zahlenbeispiel:

$$s = 234, \; p = 453960.$$

$$c = \frac{234}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{234}{4}\right)^2 - \frac{453960}{234}} = 97;$$

$$a + b = 234 - 97 = 137;$$

$$ab = 4680,$$

woraus $a = 65$ und $b = 72$.

Unter den geometrischen Sätzen, die man bei den Indern findet, hat keiner mehr Aufsehen erregt, als die bereits von Brahmegupta gelehrte Formel für die Fläche eines Dreiecks aus seinen Seiten:

$$f = \sqrt{\frac{1}{2}s\left(\frac{1}{2}s - a\right)\left(\frac{1}{2}s - b\right)\left(\frac{1}{2}s - c\right)}.$$

Man hat in der Bekanntschaft mit diesem schönen Theorem den entschiedenen Beweis dafür finden wollen, dass die brahmanischen Geometer durchaus auf den Schultern der griechischen stehen, deren Schriften, namentlich die Herons, ihnen in den ersten Jahrhunderten unserer Zeitrechnung zugänglich geworden seien; man hat sich zur weiteren Unterstützung auf den Umstand berufen, dass sowohl Heron als Brahmegupta und Bhâskara sich gerader rechtwinkliger Dreiecke 3, 4, 5 und 5, 12, 13, sowie des schiefwinkligen 13, 14, 15 zur Exemplifikation ihrer Regeln bedienen. Indes ist diese Uebereinstimmung (nach Hankels Meinung) eine durchaus natürliche; sowohl die Griechen als die Inder kennen die Formeln $\alpha^2 - \beta^2$, $2\alpha\beta$, $\alpha^2 + \beta^2$ zur Bildung rationaler rechtwinkliger Dreiecke, aus denen 3, 4, 5 und 5, 12, 13 als die einfachsten hervorgehen; was die schiefwinkligen Dreiecke betrifft, so musste beiden in gleicher Weise daran liegen, zu ihren Beispielen solche zu benutzen, bei denen das Perpendikel sich ebenfalls rational ausdrücken lässt. Sie setzten demgemäss zwei rationale rechtwinklige Dreiecke mit einer gemeinschaftlichen Kathete zu einem Dreieck so zusammen, dass sie dessen Perpendikel wurde. Unter allen solchen Paaren von Dreiecken ist aber das 5, 12, 13 und 9, 12 und 15 das einfachste. So mussten die einen wie die andern zu demselben Dreieck geführt werden.

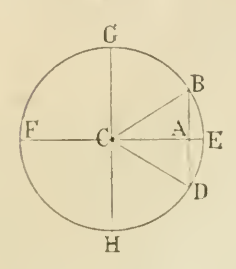
Höchst überraschend aber ist es, diese Formel an der Seite und als speziellen Fall der ähnlich gebauten Formel für die Fläche eines Kreisvierecks bei Brahmegupta zu finden. Denn es setzt die Ableitung dieser eine grosse geometrische Gewandtheit und eine eingehende Theorie der Kreisvierecke voraus, als deren Blüte dann jene im Occident zuerst von dem Niederländer Snellius um 1620 bewiesene schöne Formel erscheint.

In der That steht auch jener Satz nicht allein, sondern es folgen ihm in der Brahmasiddhanta eine Reihe der Sätze über Vierecke, unter ihnen z. B. der unter dem Namen des Ptolemäischen bekannte Lehrsatz, wonach das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten ist.

Ein ganz besonderes Interesse hat die Trigonometrie der Inder durch ihre grosse Verschiedenheit von der der Griechen. Sie bedienten sich wie die Griechen des Kreises zum Messen der Winkel und teilten, wie diese, zuerst den Umfang in vier gleiche Teile durch zwei zu einander senkrechte Durchmesser. Ein jeder Teil wurde wieder in 90 Grade à 60 Minuten, der ganze Umfang also in $4 \cdot 90 \cdot 60 = 21600$ gleiche Teile eingeteilt. Für den Radius oder Durchmesser nahmen sie kein eigenes Mass an, sie stellten ihn durch diese Teile des Umfangs dar und berechneten den Radius zu 3438 Bogenminuten. Hier zeigt

sich schon ein merkwürdiger Unterschied in dem Verfahren der Inder und dem der Griechen; diese würden nie einen Kreisteil als Mass für eine gerade Linie genommen haben. Jeder Viertelkreis wurde nun in 24 gleiche Teile geteilt, so dass auf einen solchen Teil 225 Bogenminuten kamen, was einem Winkel von $3^0 45'$ entspricht, also dieser Bogen mit seinem Sinus verwechselt werden kann. Niemals haben die Inder mit den ganzen Sehnen der doppelten Winkel, wie die Griechen, gerechnet, sondern von Anfang an mit dem Sinus und Sinus versus. In der Astronomie wird die scheinbare Bahn der Sonne als Kreis betrachtet, in 12 Teile oder Zeichen geteilt; ein jeder Teil umfasst also $30^0$. Diese Teilung kam auch hier wieder vor und ein jedes Zeichen enthält 8 Teile von 225 des ganzen Umfangs. Es seien $EF$ und $GH$ zwei zu einander senkrechte Durchmesser, $BE$ und $ED$ seien Bogen von $30^0$ oder jeder enthalte ein Zeichen, so ist $BD$ die Sehne von zwei Zeichen oder von $60^0$. Diese Linie nun ist es, welche ursprünglich Sehne (Dschya) genannt wurde, wahrscheinlich vom Bogen als Schiesswaffe hergenommen, welcher ungefähr denselben Umfang haben mochte. In der Anwendung auf die Mathematik wurde aber nicht die ganze Sehne $BD$ genommen, sondern nur ihre Hälfte $AB$ und diese auch nur auf den Bogen $BE$ bezogen, und so hiess nun $AB$ die Sehne von einem Zeichen. Die Sehne oder Senkrechte von zwei Zeichen mag Doppelsehne (Dvidschya) geheissen haben, aber die Sehne $GC$ von drei Zeichen oder der Radius hiess Dreisehne (Tridschya), woraus sich mit Bestimmtheit ergibt, dass die Inder nicht mit ganzen Sehnen gerechnet haben, wie die Griechen, sondern immer mit den Senkrechten oder den halben Sehnen. Diese Benennung wurde weiter ausgedehnt und in der Trigonometrie die Senkrechte eines Bogens überhaupt Sehne genannt, wofür wir jetzt das Wort Sinus gebrauchen. In dem Quadranten hatten nun die Inder für alle Winkel von $3^3/_4$ zu $3^3/_4$ Grad oder für je 225 Teile die Sinus berechnet, also im ganzen 24, und in einer kleinen Tafel zusammengestellt; ein Sinus der Tafel hiess Dschyapinda und die ganze Reihe Kramadschyas. Die am Ende $A$ zum Kreis aufsteigende Senkrechte, der Pfeil, welche jetzt Sinus versus heisst, wurde Utkramadschya genannt. $ABC$ sei ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem $AB$ als Grund- oder Hauptlinie angesehen werden kann, dann ist $AC$ die an ihrem Ende errichtete Senkrechte und sie hiess deswegen Kotidschya; bei uns wird sie jetzt Cosinus genannt. Man sieht, dass die Inder weiter gegangen waren als die Griechen, indem sie drei von dem Winkel oder Bogen abhängige Verhältnisse unterschieden, letztere dagegen nur die Sehne gebrauchten.

Figur 78.




Was nun die Berechnung der Tafel betrifft, so war diese höchst einfach; der Radius oder der Sinus von $90^0$ aus dem Umfang berechnet, ist 3438; der Sinus von $30^0$ ist nach einem bekannten und augenscheinlichen Satz davon die Hälfte, daher $\sin 30^0 = 1719$. Durch die Anwendung des ihnen wohlbekannten pythagoräischen Satzes, dass $\sin a^2 + \cos a^2 = r^2$, erhielt man:

$$\sin 45^0 \sqrt{\frac{r^2}{2}} = 2431.$$

Da nun ebenfalls offenbar $\cos a^2 = \sin(90 - a)$, so erhielt man ferner für

$$a = 60: \ \sin 60^{0\,2} + \cos 60^{0\,2} = r^2 \ \text{oder} \ \sin 60^2 = r^2 - {}^1/_4 r^2 = {}^3/_4 r^2,$$

daher

$$\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3r^2} = 2978.$$

Die auf diese Weise gefundenen Sinus bildeten nun die Grundlage, auf welcher die übrigen berechnet wurden; so kam man zu dem Sinus von $15^0$, $7^0 30'$, $3^0 45'$, $22^0 30'$, $11^0 15'$; man berechnete sodann die Sinus der Komplementwinkel $75^0$, $82^0 30'$, $86^0 15'$, $67^0 30'$, $78^0 45'$; von diesen stieg man durch Halbierungen herab zu $37^0 30'$, $41^0 15'$, $33^0 45'$, deren Ergänzungen $52^0 30'$, $48^0 45'$, $56^0 15'$ sind. Aus $52^0 30'$ erhielt man durch Halbierung $26^0 15'$, hieraus den Sinus von $63^0 45'$; aus $37^0 30'$ aber durch Halbierung $18^0 45'$ und durch Ergänzung $71^0 15'$. So erhielten sie auf einem theoretisch sehr einfachen Weg eine nach dem Intervalle von $3^0 45'$ fortschreitende Sinustafel, in welcher sie die Sinus durch den Bogen ausdrückten, dem sie an Länge gleich sind.

An dieser Tabelle, welche nun die Sinus als drei- und vierstellige ganze Zahlen gab, entdeckten sie das interessante Gesetz, dass wenn $a$, $b$, $c$ drei aufeinanderfolgende, um $d = 3^0 45'$ von einander abstehende Bogen bezeichnen:

$$\sin c - \sin b = (\sin b - \sin a) - \frac{\sin b}{225},$$

welcher Interpolations-Formel sie sich nun auch bedienten, um die Tabelle jederzeit wieder berechnen zu können.

Jedoch haben sich die Inder bei jener Genauigkeit keineswegs beruhigt. Bhâskara gibt die bedeutend genaueren Werte:

$$\sin 3^0 45' = \frac{100}{1529}, \quad \cos 3^0 45' = \frac{466}{467},$$

welche von den wahren Werten kaum mehr als ein Zehnmillionstel des Radius differieren. Ferner lehrte er mittels der Werte:

$$\sin 1^0 = \frac{10}{573}, \quad \cos 1^0 = \frac{6568}{6569},$$

die nur um einige Zehnmillionstel von dem genauen Wert abweichen, eine von $1^0$ zu $1^0$ fortschreitende Tabelle mittels der Formel:

$$\sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

konstruieren.[1])

„Die Trigonometrie muss ebenso einfach gewesen sein, wie die ganze Geometrie, welche wir kennen gelernt haben; sie dehnte sich sicher nur auf das rechtwinklige Dreieck aus, und die Regel der drei Glieder spielte auch hier die Hauptrolle. Schiefwinklige Dreiecke wurden in rechtwinklige zerlegt, und dadurch liessen sich alle gewöhnlichen Rechnungen leicht ausführen, in der ebenen wie in der sphärischen Trigonometrie. Bei dem Gebrauch der Tafel musste man die Sinus der fehlenden Winkel durch eine leichte Rechnung finden. Hatte man z. B. den Sinus von $27^0 48'$ nötig, so ist

$$\sin 30^0 = \sin 1800' = 1719 \text{ und } \sin 26^0 15' = \sin 1575' = 1520,$$

also der Unterschied für $225' = 199$, der gegebene Winkel hat $1668'$, ist also grösser als der von $26^0 15'$ und $148'$; nunmehr schloss man $225' : 148' = 199 : x$, woraus $x = 131$ folgte, daher ist

$$\sin 27^0 48' = 1520 + 131 = 1651.$$

Aus der ganzen Darstellung ergibt sich nun, dass die mit solchen Hilfsmitteln geführten Rechnungen keine grosse Genauigkeit haben konnten; dies zeigt schon, dass man die Senkrechte von $3^0 45'$ mit dem Bogen als zusammenfallend

[1]) Nach Arneth und Hankel.

betrachtete, es stimmt dies aber auch ganz überein mit den empirischen Formeln, welche schon in der Geometrie vorkommen, und aus allem geht hervor, dass in geometrischen Dingen die Inder eine grosse Nachlässigkeit zeigten und sich überhaupt zu diesem Gegenstand nicht hingezogen fühlten. Aus diesem Grunde dürfen wir auch nicht erwarten, dass ihre astronomischen Beobachtungen und Rechnungen eine mehr als mittelmässige Genauigkeit gehabt haben werden." [1])

---

# Die Geometrie der Araber.

„Für die Entwickelungsgeschichte der Mathematik ist eine eingehendere Betrachtung des Zustandes der Wissenschaft bei den Arabern von höchster Bedeutung, denn sie sind die Mittler, durch welche klassische Gelehrsamkeit dem christlichen Abendland überliefert worden. Leider sind die hierauf bezüglichen Quellen nur sehr spärlich und meistens in schwer zugänglichen Manuskripten vorhanden. So ist denn die Kulturgeschichte desjenigen Volks, dem das Abendland einen so grossen Teil seiner Bildung verdankt, noch mit dichtem Schleier verhüllt." [2])

Es ist bekannt, wie sich im Anfang des 7. Jahrhunderts plötzlich das in der Geschichte bisher unbekannte Volk der arabischen Beduinen, getragen von glühender Begeisterung für seine neue Religion, erhob und mit unerhörter Schnelligkeit alle benachbarten Völker unterwarf. Nachdem die Eroberungskriege ihr Ende erreicht hatten, fingen die Fürsten der Araber an, ihre Blicke auf die Künste des Friedens zu richten. Was nun die Mathematik betrifft, so war Bagdad, wie es geographisch in der Mitte zwischen zwei Quellen wissenschaftlichen Lebens, Indien und Griechenland liegt, berufen, die beiden dort entsprungenen Ströme in einen zu verschmelzen, um die Summe alles dessen, was einst Griechen und Inder geleistet, deren jüngeren Stammverwandten in Europa zu überliefern.

Abdallah Almamun (regierte von 813—33) verlangte in einem Friedensvertrag mit dem oströmischen Kaiser Michael III. als eine Hauptbedingung die Auslieferung einer grossen Anzahl griechischer Werke, die er dann in die arabische Sprache übersetzen liess. So ging die Wissenschaft des sinkenden Griechenland auf die siegreichen Araber über, um aus den Händen dieser lebensfrischen Nation dem erwachenden Europa überliefert zu werden.

So wurden zuerst die Mathematiker Euklid, Hypsikles etc. den Arabern bekannt. Bald folgten Apollonios und Archimedes. Die bedeutendsten Uebersetzer waren Achmed ben-Musa-ben-Schaker und Thebit ben-Korah. Besonders von letzterem hat man eine grosse Anzahl von Uebersetzungen: die 13 ersten Bücher Euklids, die Abhandlung des Archimedes de sphaera et cylindro, die letzten Bücher der Kegelschnitte des Apollonios u. a. m. — Euklids Elemente erhielten bei den Arabern dieselbe Stellung wie bei den Lateinern, sie waren der Ausgangspunkt jedes mathematischen Studiums.

Von den hauptsächlichsten arabischen Geometern sind zu nennen die Söhne Musa-ben-Schakers Mohammed, Hamed und Alhazan, von denen besonders der letztere durch seinen ausgezeichneten Scharfsinn in der Auflösung verschiedener schwieriger Probleme sich ausgezeichnet haben soll.

---

[1]) Arneth. — [2]) Suter.

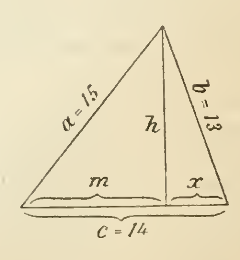
Des ersten der drei Brüder Schüler war Thebit ben-Korah. Von ihm ist noch ein Manuskript vorhanden, betitelt: „Ueber die Teilung der Oberflächen.“ In der nämlichen Zeit lebte der Mathematiker Jakob Alkindi, auch Alchindus genannt, dessen Abhandlung „de sex quantitatibus“ von Cardan als ein Meisterwerk gepriesen wird. Diese vielgenannte Regel der sechs Quantitäten besteht in der Aufgabe, Verhältnisse von Verhältnissen zusammenzusetzen oder aus gegebenen Verhältnissen andere zu berechnen. Zu ihrer Lösung führt jener berühmte Transversalensatz, den Ptolemäos aus der Sphärik des Menelaos entlehnt hat.

Das älteste Stück von Geometrie der Araber, welche wir kennen, ist in der Algebra (erschienen 820) von Mohammed ben-Musa enthalten. In der Einleitung spricht sich der Verfasser über die Veranlassung, den Zweck und Nutzen seines Werkes wie folgt aus: „Die Liebe zu den Wissenschaften, durch welche Gott den Imam Al Mamun, den Beherrscher der Gläubigen, ausgezeichnet hat, die Freundlichkeit und Herablassung, welche er den Gelehrten zeigt, die Güte, mit welcher er sie beschützt und in ihren Bemühungen unterstützt, Dunkelheiten in den Wissenschaften zu erhellen und Schwierigkeiten zu entfernen, haben mich ermuntert, ein kurzes Werk über Rechnungen durch Ergänzung und Reduktion (aljebr wa'lmukabalah) zu schreiben. Hierbei beschränkte ich mich auf das Leichteste und auf das, was das Nützlichste in der Arithmetik ist, wie es die Menschen am meisten gebrauchen, in Fällen von Erbschaften, Legaten, Teilungen, Rechtsfragen und Handel, und in allen ihren Geschäften miteinander. Ebenso, wo es sich um die Ausmessung von Ländereien handelt, überhaupt von geometrischen Rechnungen und verschiedenen anderen Dingen“ u. s. w. Das Buch war also für das Geschäftsleben bestimmt, ein elementares Werk, welches auf wissenschaftlichen Wert keinen Anspruch machte. Es gibt den Satz vom Quadrat der Hypotenuse, von den Arabern „die Figur der Braut“ genannt, seinen Beweis aber nur in dem einfachsten Falle eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, dann die Berechnung der Höhe und hieraus der Fläche eines Dreiecks, der Flächen von Parallelogrammen, der Pyramide und des Kreises. Es enthält ausser dem Werte $\pi = 3\frac{1}{7}$ auch die beiden indischen Bestimmungen:

$$\pi = \sqrt{10} \text{ und } \pi = \frac{62832}{20000},$$

sowie die Zahlen 13, 14, 15 als die Seiten eines Dreiecks, das wir auch in den Werken des Brahmegupta und Bhâskara gefunden haben. Die Abschnitte der Grundlinie in diesem Dreieck zu finden, wird durch eine Rechnung gelehrt, welche ihre Begründung in sich hat. Es sei $x$ der Abschnitt, welcher gesucht werden soll, so ist


Figur 79.




$$h^2 = 13^2 - x^2;$$

ferner

$$m = 14 - x \text{ und } m^2 = (14 - x)^2 = 196 - 28x + x^2;$$

nun ist aber auch

$$h^2 = 15^2 - m^2 = 225 - (196 - 28x + x^2) = 29 + 28x - x^2,$$

daher

$$29 + 28x - x^2 = 169 - x^2 \text{ oder } 29 + 28x = 169,$$
$$28x = 140,$$

also

$$x = 5 \text{ und } m = 14 - 5 = 9.$$

Mit Hilfe des so gefundenen Abschnittes wird nun auch die Höhe berechnet. Das Buch enthält noch Vorschriften zur Berechnung der Körper ungefähr in

der Ausdehnung wie bei Brahmegupta, von Kugel und Cylinder geschieht keine Erwähnung.

In einer Schrift der vorerwähnten Söhne des Musa ben-Schakir findet man die Formel für die Fläche des Dreiecks aus seinen drei Seiten und eine Anwendung von ihr auf ein Dreieck gemacht, das zu seinen Seiten dieselben drei Zahlen 13, 14 und 15 hat, wie bei den Indern.

Eine Schrift Abul Wefas „über die geometrischen Konstruktionen" zeigt uns, dass man die Reisskunst zu vervollkommnen suchte; man findet hier eine sehr anschauliche Konstruktion der Eckpunkte der regelmässigen Polyeder auf der umschriebenen Kugel und zum erstenmal die im Abendland so berühmt gewordene Bedingung eingeführt, dass die Konstruktionen mit einer einzigen Zirkelöffnung ausgeführt werden sollen.

Die griechischen Geometer hatten zu ihren Untersuchungen manchmal Sätze nötig, welche in den Elementen nicht enthalten und vielleicht auch sonst nicht bekannt waren; diese wurden dann als Hilfssätze eingeschaltet und einen solchen Satz nannte man Lemma. Eine Reihe solcher Lemmen wurden von den Arabern dem Archimedes zugeschrieben, von Thebit ben-Korah übersetzt und zu verschiedenen Zeiten von andern Arabern erläutert und vielfältig besprochen. An diese schliessen sich dann kleinere Schriften über geometrische Oerter oder einzelne Aufgaben an, so vor allem verdankt man Sedillot die Kenntnis eines Originalwerkes der Araber: Traité des connues géométriques par Hassan ben-Haithem. Dessen erstes Buch „enthält vollkommen neue Dinge", das zweite Buch enthält Sätze ähnlich denen der Data des Euklid. Das erste Buch bestimmt in seinen Sätzen zahlreiche geometrische Oerter, die auf gerade Linien oder Kreise führen; so z. B. den Ort eines Punktes, wenn der Quotient oder die Quadratsumme seiner Abstände von zwei festen Punkten konstant ist etc. Alle Sätze des zweiten Buches gehören der elementaren Geometrie an und sind vorherrschend solche, wie man sie den Schülern als Uebungsbeispiele vorlegt, wenn diese schon die Elemente der Geometrie inne haben. Die Angabe einiger Propositionen wird zeigen, von welcher Beschaffenheit sie sind: 1) Wenn man von einem der Lage nach gegebenen Punkt eine Gerade zieht von gegebener Länge, so wird sich der Endpunkt dieser Geraden auf dem Umfang eines Kreises befinden, welcher der Grösse und Lage nach gegeben ist. 3) Wenn man in einem der Grösse und Lage nach gegebenen Kreis einen Punkt von gegebener Lage hat, verschieden vom Mittelpunkt, und wenn man von diesem Punkt eine Gerade nach dem Kreis zieht und sie verlängert, so dass die Verlängerung ein gegebenes Verhältnis hat zu dieser Geraden, so liegt der Endpunkt der Verlängerung auf dem Umfang eines neuen Kreises, welcher der Grösse und Lage nach gleichfalls gegeben ist. 8) Wenn man von zwei der Lage nach gegebenen Punkten zwei Gerade von gleicher Länge zieht, bis sie sich durchschneiden, so liegt der Durchschnittspunkt auf einer Geraden, welche der Lage nach gegeben ist. 9) Wenn man von zwei der Lage nach gegebenen Punkten zwei Gerade zieht, bis sie sich durchschneiden, und wenn das Verhältnis der beiden Geraden gegeben ist, nämlich von der grösseren zur kleineren, so wird der Durchschnittspunkt auf dem Umfang eines Kreises sich befinden, welcher der Lage nach gegeben ist. 24) Wenn man in einem Kreis, welcher der Grösse und Lage nach gegeben ist, irgend eine Sehne zieht und sie in irgend zwei Teile teilt, und wenn das Produkt dieser Teile gegeben ist, so wird der Teilungspunkt auf dem Umfang eines Kreises liegen, welcher der Grösse und Lage nach gegeben ist. Die dritte und letzte Abteilung enthält weitere 25 Propositionen, von denen hier folgende stehen mögen: 2) Wenn man von einem gegebenen Punkt durch einen der Lage nach gegebenen Kreis eine Gerade zieht, welche von ihm einen

gegebenen Abschnitt trennt, so ist diese Gerade der Lage nach gegeben. 4) Wenn man von einem gegebenen Punkt nach zwei Parallellinien, welche der Grösse und Lage nach gegeben sind, eine Gerade zieht, welche von ihnen irgend zwei Stücke abschneidet, und wenn das Verhältnis dieser Stücke gegeben ist, so wird auch die Gerade der Lage nach gegeben sein. 12) Wenn ein Kreis der Grösse und Lage nach gegeben ist, und auch eine Gerade der Lage nach, und man zieht an den Kreis eine Tangente, welche von der Geraden begrenzt wird, so wird, wenn diese Tangente der Grösse nach gegeben ist, sie es auch der Lage nach sein. 24) und 25) Wenn man zwei Kreise hat, welche der Grösse und Lage nach gegeben sind, und man zieht eine Gerade, welche beide Kreise berührt, so wird auch diese der Grösse und Lage nach gegeben sein.

„Alle diese Dinge," sagt am Ende Hassan ben-Haithem, „sind von bedeutendem Nutzen für die Auflösung geometrischer Aufgaben und sind von keinem der älteren Geometer gesagt worden."

Auf dem Gebiet der Geometrie ist es vor allem die Trigonometrie, die wegen ihrer Anwendung auf die Astronomie bei den Arabern besondere Berücksichtigung fand. Der bekannteste arabische Gelehrte in dieser Wissenschaft ist der schon früher genannte Astronom Mohammed ben-Musa, dessen astronomische Tafeln sehr berühmt waren und dessen Werk unter dem Titel: „De figuris planis et sphaericis" auf uns gekommen ist. Er handelt darin über die Auflösung der sphärischen Dreiecke und wendet dazu Methoden an, die den heutigen mit Hilfe der goniometrischen Zahlen nicht unähnlich sind. Der andere Fortschritt, den die Trigonometrie der Araber zeigt, besteht darin, dass die trigonometrischen Sätze, welche bei den Griechen durchaus geometrische Lehrsätze sind, bei den Arabern den Charakter von algebraischen Formeln tragen. So findet sich bei Mohammed Ebn Geber, Statthalter der Khalifen in Syrien, nach seiner Vaterstadt Batan in Mesopotamien Albatani genannt (geb. 850, gest. 930), nicht selten, dass aus einer Gleichung

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = D$$

der Wert von $\varphi$ mittels

$$\sin \varphi = \frac{D}{\sqrt{1 + D^2}}$$

bestimmt wird. Von den trigonometrischen Fundamentalsätzen kennt Albatani ausser denen des Almagest bereits die Formel

$$\cos a = \cos b \, \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$

für schiefwinklige Dreiecke, die er daher nicht immer in zwei rechtwinklige zerlegen muss, und weiss dieselbe, um eine Multiplikation zu sparen, in die Form zu setzen:

$$\sin \operatorname{vers} \alpha = \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Albatani soll zuerst den Sinus anstatt der ganzen Sehnen, deren sich die Alten bedienten, eingeführt haben. Da diese Anwendung der Sinus unter andern Vorteilen auch die Bequemlichkeit hatte, dass man dadurch die Mühe sparte, die gegebenen Winkel zu verdoppeln, und dass die danach entworfenen Tafeln statt auf einen Halbkreis ausgedehnt zu werden, nun bloss auf seinen Quadranten eingeschränkt wurden, so kann man leicht denken, wie gern und dankbar die nachfolgenden Mathematiker diese Erfindung aufnahmen. Die Inder hatten schon von einem andern Verhältnis, dem Kosinus, Gebrauch gemacht; bei Albatani aber

findet man die erste Idee zu den Tangenten, obschon noch nicht in ihrer vollen Entwickelung; erst Abul-Wefa (s. d.) war es vorbehalten, die Ideen des Albatani auszuführen.

Weil die Sinus der schiefen Winkel als Teile vom Sinus des rechten Winkels angesehen werden können, so nannte man letzteren den ganzen Sinus oder Sinustotus. Die alten Mathematiker, wie Ptolemäos und Albatanius, teilten den Durchmesser in 120, folglich den Halbmesser in 60 gleiche Teile. Jeden dieser Teile zerlegten sie auf ähnliche Art wie die Grade der Kreisbögen in 60 Minuten à 60 Sekunden, und in solchen Teilen des Halbmessers drückten sie erst die ganzen Sehnen, dann auch ihre Hälften aus. Die Unbequemlichkeit dieser Einteilung nach 60 musste man bald einsehen, aber erst der berühmte Astronom Georg Purbach nahm in der Mitte des 15. Jahrh. eine genauere und bequemere Einteilung damit vor, indem er den Sinustotus in 100 000 Teile teilte und darnach eine neue Sinustafel von 10 zu 10 Minuten berechnete.

Abul Wefa (937—998) in Bagdad erweiterte die ganze Trigonometrie durch Einführung der Tangente als selbständige trigonometrische Funktion (er hatte auch schon die Idee der Kotangente und der Sekante) und Ibn-Jonis in Kairo (979—1008) berechnete Tafeln für die Tangenten und Sekanten für den ganzen Viertelkreis und machte von diesen Funktionen denselben Gebrauch, welchen wir davon in unsern Rechnungen machen. Da seine Tafeln nicht auf uns gekommen sind, so wird meistens Regimontan als Erfinder derselben genannt, indem er unter den Europäern zuerst, und zwar für den Halbmesser 100 000, Tangenten einführte.

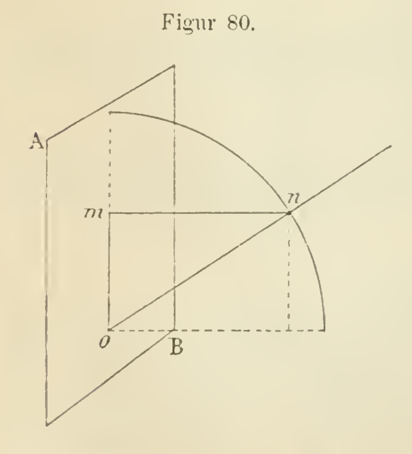
Mohammed Geber ben-Aflah aus Sevilla (um 1050) schrieb eine kurze Abhandlung über Trigonometrie, die 1534 von Peter Apianus herausgegeben wurde, und die sphärische Trigonometrie verdankt ihm die Formel:

$$\cos C = \sin B \cos c.$$

welche die fünfte von den sechs Formeln für die Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke ist.

Aus dem Anfang des 13. Jahrhunderts ist noch einer der besten arabischen Mathematiker zu erwähnen: Abul Hassan Ali von Marokko, der auch ein Werk über Kegelschnitte geschrieben hat. Aus einer seiner Schriften entnehmen wir die Anschauung der Araber von den neuen trigonometrischen Linien: Man denke sich auf einer Vertikalebene $AB$ eine Senkrechte $mn$, welche durch die einfallenden Sonnenstrahlen einen Schatten $mo$ wirft, so ist dieser vertikale Schatten die Tangente des Winkels der Sonnenhöhe; die Entfernung der äussersten Punkte der Senkrechten und des Schattens ist der Durchmesser des vertikalen Schattens, unsere jetzige Sekante. Denkt man sich aber eine horizontale Ebene und darauf eine Senkrechte, so erhält man auf gleiche Weise einen horizontalen Schatten, unsere Kotangente, und einen Durchmesser des horizontalen Schattens, unsere Kosekante.

Figur 80.




Das heute gebräuchliche Wort „Sinus“ hiess bei den Arabern „dschaib“; einige Mathematiker möchten es aus der Abkürzung von „semissis inscriptae“

entstanden denken, die etwa so ausgesehen haben mag „s. ins“, was leicht in Sinus hätte übergehen können; andere haben wieder andere Ansichten. — Auch das Wort „Grad“ zur Bezeichnung des 300. Teils des Kreisumfangs wurde von den Arabern eingeführt und hiess bei ihnen „dergeh“, die Stufe, der Grad. Die Alten hatten für diese Teile die Bezeichnung partes.

Resumé nach Chasles: „Die Araber haben eine grosse Achtung und entschiedenen Geschmack für die mathematische Wissenschaft gezeigt; sie haben eine vollständige Kenntnis der Werke und des Wissens der griechischen Geometer gehabt; sie haben die Trigonometrie merklich vervollkommnet und umgestaltet; in den andern Teilen der Geometrie scheinen sie nicht über die Griechen hinausgegangen zu sein; in anderer Beziehung haben sie aber einen wesentlichen Vorzug vor den Griechen, indem sie die Algebra der Inder besassen und dieselbe auf die Geometrie anwandten, wodurch ihre mathematische Wissenschaft einen eigentümlichen und originellen Charakter erhielt, der den Europäern überliefert ist und den Grund bildete zu der im 16. Jahrhundert so schnell erlangten Ueberlegenheit über die Geometer des Altertums.“

---

# Die Geometrie der Römer.

Die mathematischen Wissenschaften wurden von dem römischen Volk ausserordentlich vernachlässigt, da bei ihm die ausgezeichneteren Geister sich nur der Kriegskunst und der Beredsamkeit zuwandten. Die Geometrie insbesondere war zu Rom kaum gekannt und scheint bei den Lateinern nur den einzigen Zweck gehabt zu haben, Länder zu vermessen und Grenzen zu bestimmen, wobei es mehr auf rasche und bequeme Ausführung als auf wissenschaftliche Strenge ankam.

Wir finden in Rom seit den ältesten Zeiten eine mit dem Kultus und der gesamten Weltanschauung eng zusammenhängende Vorliebe für eine streng gesetzliche rechtwinklige und geradlinige Abgrenzung des Bodens. Die Mauern und Strassen sind parallel und schliessen quadratische Räume von vorgeschriebener Grösse ein. Alles römische Land war in viereckige Stücke geteilt, deren äussere Form schon, ob quadratisch oder oblong, dem kundigen Auge die verschiedenen Rechtsverhältnisse der betreffenden Grundstücke anzeigte. Trotzdem aber die Feldmesskunst im römischen Reich eine grosse Rolle spielte, hat sie sich im Lauf mehrerer Jahrhunderte doch nicht wesentlich ausgebildet, da den Römern ein ideales Bedürfnis zur Erweiterung ihres Wissens gänzlich fehlte und sie die Geometrie nur praktischen Bedürfnissen dienstbar machten. So entstand in Rom eine sogen. Näherungsgeometrie, deren Regeln durchgehends leichter Anwendung fähig, aber ebenso durchgehends nur in geringem Mass richtig sind. Die wissenschaftliche Geometrie existierte bei den Römern so gut wie gar nicht. Die Feldmesser, welche man Agrimensores oder Gromatici nannte, waren sehr geachtete Leute, welche man als die eigentlichen Bewahrer der Wissenschaft betrachtete. Nach den auf uns gekommenen Fragmenten ihrer Schriften ist ihnen der Titel als Geometer durchaus abzusprechen.

Hankel schreibt darüber: Während die Feldmesskunst aller andern alten Völker entweder in tiefes Dunkel gehüllt oder doch nur unvollständig bekannt ist, so sind wir über die des römischen Kaiserreichs genügend unterrichtet durch eine Sammlung feldmesserischer Schriften, welche uns überliefert sind. Was nun den geometrischen Teil derselben betrifft, so lässt sich schwer sagen, ob die Roheit der Darstellung oder die Dürftigkeit und Fehlerhaftigkeit des Inhalts

den Leser mehr abschreckt. Die Darstellung ist unter aller Kritik, die Terminologie schwankend, von Definitionen der Grundbegriffe oder einem Beweis der mitgeteilten Vorschriften keine Rede; die Regeln selbst sind nicht formuliert, vielmehr muss sie der Leser aus einem ohne Präzision und Klarheit vorgetragenen numerischen Beispiel abstrahieren. Der Totaleindruck ist der, als ob die römische Feldmesskunst Tausende von Jahren älter als die griechische Geometrie sei und zwischen beiden eine Sündflut liegen müsse.

Was nun den Inhalt betrifft, so ist er nicht weniger schülerhaft und jämmerlich: er zerfällt in zwei Teile: die Vorschriften zur Berechnung und die zur Vermessung der Grundstücke. Der erste beschränkt sich auf die Berechnung der einfachsten Figuren; der pythagoräische Lehrsatz kommt nur selten zur Anwendung, dagegen finden sich einige Formeln Herons wieder, so die Formel für die Fläche eines beliebigen Dreiecks aus seinen drei Seiten, die annähernd richtige Formel für die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks und für die eines Kreissegments. Daneben aber erscheint, und zwar bei denselben Schriftstellern, welche die heronische Formel $\frac{13}{30}a^2$ für die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite $a$ kennen, als Ausdruck der Fläche die, wie es scheint den Römern eigentümliche Formel $\frac{1}{2}(a^2+a)$, welche unerklärlich wäre, wenn nicht daneben für die Fläche eines regelmässigen Siebenecks mit der Seite $a$ die Formel $\frac{1}{2}(5a^2-3a)$ erschiene. Das sind aber die entsprechenden Polygonalzahlen, und man sieht, dass der Erfinder jener Formeln die Flächen jenes Dreiecks oder Siebenecks mit Quadraten, deren Seite die Längeneinheit ist, netzförmig ausgefüllt dachte und die Anzahl der Quadrate dem Flächenraum gleich setzte, indem er den Unterschied, welcher an den Grenzen des Polygons zwischen diesem und dem Netz von Quadraten entstand, vernachlässigte. In der Praxis wird der Unterschied, wenn bei der Berechnung nach jener Formel eine sehr kleine Masseinheit angenommen wird, gering werden. Dass man aber eine solche, von der Grösse des absoluten Masses abhängige, nicht homogene Formel wie $\frac{1}{2}(a^2+a)$ einer Flächenberechnung unbedenklich zu Grunde legte, beweist genügend den gänzlichen Mangel geometrischer Einsicht. Nimmt man die Seite $a$ eines gleichseitigen Dreiecks $= 30$ cm an, so ist die Dreiecksfläche genau:

$$\frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = 0.433\,a^2 = 389.7 \text{ qcm};$$

nach der Formel des Heron:

$$\frac{13}{30}a^2 = 390 \text{ qcm};$$

dagegen nach der römischen Formel:

$$\frac{1}{2}(a^2+a) = 465 \text{ qcm},$$

also wesentlich von der Richtigkeit abweichend.

Neben den beiden Formeln $\frac{13}{30}a^2$ und $\frac{1}{2}(a^2+a)$ findet sich endlich noch die dritte Formel $\frac{1}{2}a^2$ für die Fläche des gleichseitigen Dreiecks, die vermutlich

hervorgegangen ist aus der ägyptischen Formel $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$ zur Berechnung eines beliebigen Vierecks.

Die Operationen der römischen Feldmesser auf dem Felde selbst bestanden vornehmlich aus einfachen Messungen der Grenzen der Grundstücke mit der Messkette, was auch bei unregelmässigen Grundstücken für ausreichend gehalten wurde, wie die Berechnung der Fläche eines beliebigen Vierecks aus seinen vier Seiten beweist; ja man bestimmte sogar die Grösse einer ganz unregelmässig begrenzten Stadt nicht selten nach ihrem Umfange. Bemerkenswert ist eine Stelle aus M. Fabius Quintilianus Werke (dessen Lebenszeit etwa von 35—95 angesetzt wird). Dieselbe lautet: „Wer wird einem Redner nicht vertrauen, wenn er vorbringt, der Raum, der innerhalb gewisser Linien enthalten sei, müsse der gleiche sein, sofern jene Umfassungslinien dasselbe Mass besitzen? Doch ist dieses falsch, denn es kommt sehr viel darauf an, von welcher Gestalt jene Umfassung ist, und von den Geometern ist Tadel gegen solche Geschichtschreiber erhoben worden, welche da glaubten, die Grösse von Inseln werde zur Genüge durch die Dauer der Umschiffung gekennzeichnet. Je vollkommener eine Gestalt ist, um so mehr Raum schliesst sie ein. Stellt daher jene Umfassungslinie einen Kreis dar, welches die vollkommenste der Gestalten der Ebene ist, so schliesst sie mehr Raum ein, als wenn sie bei gleicher Küstenstrecke ein Quadrat bildete. Das Quadrat hinwiederum schliesst mehr Raum als das Dreieck, das gleichseitige Dreieck mehr als das ungleichseitige“ etc.

Alle sonstigen Operationen auf dem Felde beschränkten sich ausser einfachen Nivellements mit der Wasserwage auf das Einvisieren gerader Linien oder vielmehr senkrechter Ebenen und das Abstecken von rechten Winkeln, welches mit einem, vielleicht schon im 3. Jahrhundert v. Chr. den Römern bekannten Instrumente, der Stella oder Groma, geschah. Dasselbe bestand aus zwei horizontalen, sich rechtwinklig kreuzenden, metallenen Armen, an deren Enden Fäden mit Gewichten beschwert herabhingen; es ruhte auf einem Gestell, das in der Mitte ein Senkel trägt, um den Mittelpunkt der sich kreuzenden Arme genau über einen bestimmten Punkt des Erdbodens zu stellen. Trotzdem bereits Heron begründete Einwendungen gegen die Genauigkeit dieses Instruments erhoben und darauf aufmerksam gemacht hatte, dass man weder die horizontale Lage der Arme, noch beim Winde die vertikale Richtung jener Fäden verbürgen könne, so haben es doch die römischen Feldmesser nicht für nötig gehalten, von dem plumpen Handwerkszeug abzugehen.

Figur 81.

Die Methoden zur Lösung der leichtesten geometrischen Aufgaben beruhen auf jenen beiden Operationen. Die schwierigste Aufgabe ist die Messung der Breite $AB$ eines Flusses, die Niphus folgendermassen löst: Man ziehe $AD$ parallel dem Flusse, also senkrecht zu $AB$, halbiere $AD$ in $E$, konstruiere mittels der Groma $DF$ senkrecht $AD$ und bestimme dann, indem man von $E$ aus die Groma in der Richtung $EB$ einstellt, nach rückwärts den Punkt $F$, dann ist $DF = AB$.

Diese Lösung kann als ein Muster aller andern angesehen werden; sie entspricht durchaus dem ganzen Geist der römischen Feldmesskunst. Alle Längen, die nicht unmittelbar zugänglich sind, mittels kongruenter Dreiecke auf das Feld zu zeichnen, damit sie dort einer direkten Messung unterworfen werden können. Nirgends finden wir die eleganteren genaueren Methoden Herons, welche die gesuchten Grössen nicht mittels kongruenter, sondern ähnlicher Dreiecke bestimmen und somit wenigstens die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren und die Rechnung mit Proportionen als bekannt voraussetzen. Die römischen Methoden dagegen sind so urwüchsig und roh-handwerksmässig, dass sie ohne den geringsten Grad geometrischen Wissens erfunden, gelernt und ausgeübt werden konnten. Von der theoretischen Mathematik aber haben sich die Römer ferngehalten bis in die letzten Zeiten des untergehenden Reiches. Nur ganz vereinzelt werden Männer genannt, welche der Mathematik ihre Kräfte teilweise widmeten. Der älteste ist Marcus Terentius Varro (116—27 v. Chr.), welcher für den gelehrtesten unter den Römern galt und wie Cassiodorus bezeugt, die Abplattung der Erde vermutet hat. Seine Schrift über Geometrie ist verloren gegangen.

Sextus Julius Frontinus (70 n. Chr. Prätor in Rom) hat (nach Chasles) unter andern auch ein Werk über Geometrie geschrieben, welches bis auf den heutigen Tag als Manuskript vorhanden sein soll und über die Ausmessung der Oberflächen handelt. Dabei ist zu bemerken, dass unter dem Namen des Boethius eine vielbesprochene und bestrittene Geometrie in zwei Büchern existiert, deren zweites Buch sich hauptsächlich auf Ausmessung von Flächen bezieht. Am Anfang dieses zweiten Buches heisst es: „Schon am Anfang des vorigen Buches haben wir die Bedeutung des Wortes Messen auseinandergesetzt. Gleichwohl ist es wünschenswert für solche, die sich speziell mit dieser Kunst beschäftigen, das Messen noch nach Julius Frontinus, jenem überaus einsichtigen Oberfeldmesser, zu erklären.“ Daraus geht hervor, dass Julius Frontinus in der That über praktische Geometrie geschrieben hat und dass seine Schrift anderweit benutzt worden ist. Chasles nimmt auf Grund genauer Vergleichungen an, dass das zweite Buch der Geometrie des Boethius nichts anderes ist als das Werk des Frontinus, von dem Boethius sagt, dass er von ihm entlehnt habe. Chasles bemerkt weiter: Dieses Stück der Geometrie kann dem Verfasser alle Ehre machen, denn wir betrachten es als das vollendetste Werk, welches aus der Feder eines lateinischen Geometers hervorgegangen ist, ohne davon das zweite Buch der Geometrie des Boethius auszunehmen. Einesteils nämlich finden wir in dieser Schrift die Formel für die Fläche eines Dreiecks durch die drei Seiten ausgedrückt und anderenteils finden wir darin nicht die ungenaue Regel, deren sich die römischen Feldmesser bedienten, um die Fläche des Vierecks zu bestimmen, welche selbst von Boethius reproduziert wurde.

Da das in Rede stehende Stück der Geometrie das gesamte Wissen der lateinischen Schriftsteller zu enthalten scheint, so wollen wir die Sätze andeuten, welche den Gegenstand desselben ausmachen:

1) Die Berechnung des Perpendikels in einem Dreieck, dessen Seiten gegeben sind.

2) Die Berechnung der Fläche eines Dreiecks als Funktion dieses Perpendikels, und die Formel, welche die Fläche als Funktion der Seiten gibt.

3) Die beiden Formeln, welche dazu dienen, ein rechtwinkliges Dreieck in ganzen Zahlen zu bilden, wenn die eine der Seiten als gerade oder ungerade Zahl gegeben ist.

4) Der Ausdruck für den Durchmesser des Kreises, der einem rechtwinkligen Dreieck einbeschrieben ist; dass er nämlich gleich ist der Summe der beiden Katheten weniger der Hypotenuse.

5) Die Berechnung der Fläche des Quadrats, des Parallelogramms, des Rhombus und des Vierecks mit parallelen Bases (d. h. Gegenseiten).

6) Die (auf eine falsche Regel gegründete) Berechnung der Flächen der regelmässigen Polygone.

7) Das Verhältnis $\frac{22}{7}$ der Peripherie zum Durchmesser.

8) Endlich die Oberfläche der Kugel, welche gleich der Fläche von vier grössten Kreisen ist.

Die Geometrie des Martianus Mineus Felix Capella (geb. in der ersten Hälfte des 5. Jahrh. in Karthago) ist eine eigentümliche Verbindung von einer blossen Aufzählung geographischer Namen und kurzen Beschreibungen historisch interessanter Orte mit einzelnen Definitionen von Linien, Figuren und Körpern, meistens nach Euklid. Bei Martianus Capella sind die geometrischen Namen in ihren griechischen Formen benutzt, während in den nahezu gleichzeitigen Geometrien anderer Schriftsteller dieselben durch lateinische Wörter ersetzt sind. Allerdings vermeidet Boethius die griechische Sprache nicht durchweg. Die Teile der Geometrie, welche den Namen Geometrie wirklich verdienen, sind pythagoräisch.

Die Geometrie des Magnus Aurelius Cassiodorus besteht nur aus ganz kurzen Wort- und Sacherklärungen.

Weitaus der bedeutendste Schriftsteller dieser Periode ist Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius (geb. zwischen 480—482, gest. 524). Seine Geometrie lehrt zum erstenmal bei den Lateinern die Geometrie des Euklid und enthält einige interessante Stücke aus der Geschichte der Wissenschaft. Die Ueberschrift lautet in den Druckausgaben: Der Geometrie des Euklides von Megara, übertragen von Anitius Manlius Severinus Boethius erstes Buch, und gleich nach dieser Ueberschrift folgende Worte: „Da ich, mein Patricius, auf dein Ansuchen, der du von Geometern wohl die meiste Uebung besitzest, auf mich genommen habe, das, was von Euklid über die Figuren der geometrischen Kunst dunkel vorgetragen wurde, auseinanderzusetzen und für einen leichteren Eingang zuzubereiten, so glaube ich zuerst den Begriff des Messens erläutern zu müssen.“ Das erste dieser Bücher ist ein Auszug aus Euklid, welcher ausser den Definitionen, Petitionen und Axiomen die Lehrsätze der drei ersten Bücher der Elemente, aber ohne Beweise enthält; nur am Schluss finden sich als Beispiele die drei ersten Aufgaben des ersten Buches der Elemente mit Konstruktion und methodischem Beweis: 1) Ueber einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu beschreiben; 2) von einem gegebenen Punkt aus eine Gerade von gegebener Länge zu ziehen; 3) von einer grösseren Strecke eine kleinere abzuschneiden. Dies war das einzige Bruchstück der Methode der griechischen Geometer, welche das Mittelalter kannte, aber nicht verwerten konnte; in der ganzen übrigen mathematischen Litteratur der Römer findet sich nirgends wieder die Spur eines Beweises. Das zweite Buch dieser sogen. Geometrie des Boethius, welches, wie schon bemerkt, von Chasles nur für eine Kopie des Werkes des Frontinus gehalten wird, lehrt die Berechnung der einfachsten ebenen Figuren an numerischen Beispielen und gehört jenem Kreise der feldmesserischen Litteratur an, die bis zum 12. Jahrhundert die einzige Quelle geometrischer Weisheit bleiben musste.

# Die Geometrie der Occidentalen im Mittelalter.

„Wir gelangen nun zu der näheren Betrachtung jenes langen und unfruchtbaren Zeitraums, der die wissenschaftliche Thätigkeit des alten Griechenlands von der des neuen Europas trennt. Alle Begriffe der Menschen über wissenschaftliche Gegenstände waren nur dunkel und verworren, und die geistige Anlage, diese Begriffe mit den Beobachtungen in irgend eine bestimmte Harmonie zu bringen, schien gänzlich zu fehlen. Dieses Uebel wurde noch durch eine besondere moralische Eigenschaft in dem Charakter jener Zeiten vergrössert: durch eine sklavische Feigheit des Denkvermögens auf der einen Seite und durch Unverträglichkeit alles Widerspruchs auf der andern Seite. Dazu kam noch eine eigene Art von enthusiastischer Stimmung, die, einmal in die Untersuchung eingeführt, alle geistigen Operationen gewissen ganz verdrehten und illusorischen Ideen unterzuordnen strebt."

Während die Araber eine schnelle und glänzende Laufbahn in der Wissenschaft zurücklegten, waren die Europäer noch in Unwissenheit versunken. Erst Jahrhunderte waren im stande, die Einflüsse der Völkerwanderung zu verwischen und die Menschen für die Kultur des Geistes empfänglich zu machen. Die Geometrie hatte in jener Zeit weder ein religiöses noch ein praktisches Interesse und so finden wir denn auch in der ganzen Litteratur jener Zeit kaum die geringsten Spuren, dass man in diese Wissenschaft weiter eingedrungen wäre als bis zu den Definitionen eines Dreiecks, Vierecks, Kreises oder einer Pyramide und eines Kegels, wie sie z. B. Martianus Capella darbot.

Zu Anfang des 8. Jahrhunderts besass Beda mit dem Beinamen Venerabilis, ein angelsächsischer Mönch (671—735), eine für seine Zeit grosse Bildung und schrieb über viele verschiedene Gegenstände. Eines seiner Bücher enthält eine ziemliche Anzahl von arithmetischen Aufgaben „zur Aufrechterhaltung der mathematischen Bildung". Aber man sieht aus den Regeln, deren sich der Verfasser zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks und Vierecks bedient, in welchen beklagenswerten Zustand dieselbe geraten war.[1])

Die Geschichte führt uns nun zu dem berühmten Gerbert, nachmaligem Papst Sylvester II., über welchen die Nachrichten insofern auseinandergehen, als man allgemein annimmt, dass dieser Mönch zu seiner Ausbildung nach Spanien ging, als dem einzigen Punkt in Europa, wo die vom Orient eingeführten Wissenschaften von den Sarazenen kultiviert wurden. Demgegenüber betont Cantor, dass Gerbert nie bei den Arabern oder in der spanischen Mark gewesen sei, und auch Chasles erkennt aus der Analyse der Geometrie des Gerbert, dass dieselbe in der Weise der Schriften des Boethius abgefasst ist und dass man darin keineswegs den arabischen Ursprung erkennen kann. Gerbert, von armen Eltern niederer Herkunft am Anfang des 10. Jahrhunderts wahrscheinlich in den Gebirgen der Auvergne geboren, erhielt seine erste Ausbildung auf der Gelehrtenschule zu Aurillac. Durch Borel, Graf von Barcelona, kam Gerbert 968 zu Hatto (oder Haiton), dem Bischof von Vich (span. Provinz Barcelona), welcher ihn besonders in Philosophie, Geometrie und Astronomie unterrichtete. Von Hatto mit nach Italien genommen, reiste Gerbert mit einem in Rom anwesenden Gesandten des Königs Lothar nach Rheims, wo er seine erste Lehrthätigkeit begann.

[1]) Wir verdanken ihm noch unsere christliche Zeitrechnung nach der Bestimmung des römischen Abts Dionysius des Kleinen, die er in den nördlichen Gegenden Europas zuerst in Aufnahme brachte, sowie auch die Beschreibung der verlorenen Dionysianischen Ostertafel. Seine sämtlichen Werke erschienen in acht Foliobänden zu Basel im Jahr 1583.

Seine Schule zählte bald zu den glänzenden des Landes und er blieb wohl an zehn Jahre in seiner Rektorenstellung. Anfangs der 80er Jahre erscheint Gerbert wieder in Italien, und zwar am Hofe Otto II. in Ravenna, wo er Weihnachten 980 eine berühmt gewordene philosophisch-mathematische Disputation gegen Ohtric bestand, wofür ihn der König als Abt in Bobbio einsetzte. Als Nichtitaliener erfuhr er in seiner neuen Stellung allerlei Anfeindungen und Widerwärtigkeiten, so dass er 983 seine Abtei verliess und zum zweitenmal seinen Aufenthalt in Rheims nahm. Infolge seiner politischen Thätigkeit streng bewacht, gelang es ihm, Ende 989 zum König Hugo zu entfliehen. Hugo Capet liess Gerbert 991, nach Absetzung Arnulfs, zum Erzbischof von Rheims wählen, doch erkannte der Papst ihn nicht an und nach Hugos Tode musste Gerbert 997 dem Arnulf weichen. Er begab sich zu Otto III., der sein Schüler gewesen war, nach Magdeburg; dieser nahm ihn mit nach Italien, machte ihn 998 zum Erzbischof von Ravenna und im folgenden Jahre, nach Gregors V. Tode, ohne Rücksicht auf die Römer zu nehmen, zum Papst unter dem Namen Sylvester II. Am 12. Mai 1003 erfolgte sein Tod.

Was Gerbert in Geometrie leistete, war freilich nach dem jetzigen Massstabe der Geometrie äusserst wenig, aber für jene trüben Zeiten doch soviel, dass man ihn damals für einen Hexenmeister hielt. Dies zeigt, wie ungeheuer damals die Unwissenheit gewesen sein muss, denn man muss doch zugestehen, dass das Werk von Gerbert über die Geometrie sich nur auf die elementarsten Materien dieser Wissenschaft bezieht und nur sehr oberflächliche Kenntnisse zeigt. Der Kontrast (schreibt Chasles), welchen diese Werke mit dem vorgerückten Zustande der Wissenschaft in dieser Epoche bei den Arabern darbieten, lässt daran zweifeln, ob sie es waren, von denen Gerbert seine Kenntnisse erhielt, wie vielfach behauptet wird. Man erkennt in seiner Geometrie eher eine Nachahmung und einen Kommentar der Werke des Boethius, als einen Widerschein des Wissens und der Methoden der Araber, wovon wir die ersten Spuren in Frankreich erst im 12. Jahrhundert finden.

Nachdem Gerbert in seiner Geometrie die ersten auf Geometrie bezüglichen Definitionen gegeben hat, lehrt er die Masse kennen, von denen die Alten Gebrauch gemacht haben: diese sind der digitus, die uncia, der palmus etc. der Römer, von denen man das Verzeichnis in der Geometrie des Boethius findet. Er widmet mehrere Kapitel den rechtwinkligen Dreiecken, die er trianguli pythagorici nennt und die er in rationalen Zahlen zu konstruieren lehrt, wenn eine der Seiten gegeben ist. Er wendet dabei teils die bekannten, dem Pythagoras und Platon zugeschriebenen Regeln an, welche ganze Zahlen für die Seiten geben, und teils andere Regeln, welche Brüche geben. Die einen sowie die andern lassen sich aus den allgemeinen Regeln, die wir in den indischen Werken gefunden haben, ableiten. In Bezug auf diese rechtwinkligen Dreiecke löst Gerbert ein für jene Zeit merkwürdiges Problem auf, welches von einer Gleichung des zweiten Grades abhängt; nämlich dieses: Wenn die Fläche und die Hypotenuse gegeben sind, die beiden Seiten zu finden. Es sei $A$ die Fläche und $C$ die Hypotenuse, so gibt die Lösung von Gerbert, in eine Formel übersetzt, für die beiden Seiten diesen doppelten Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{C^2+4A} \pm \sqrt{C^2-4A}\right).$$

Es sei die Fläche $A = 30$ qcm, die Hypotenuse $C = 13$ cm, so ist die eine Seite:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{169+120}+\sqrt{169-120}\right) = \frac{1}{2}(17+7) = 12;$$

die andere Seite:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{169+120}-\sqrt{169-120})=\frac{1}{2}(17-7)=5.$$

12, 5 und 13 geben ein pythagoräisches Dreieck. — Sodann berechnet er das Perpendikel in einem Dreieck, dessen Seiten bekannt sind. Er nimmt für diese Seiten die drei Zahlen 13, 14 und 15. Er gibt für die Flächen der regelmässigen Polygone die falschen Formeln der römischen Feldmesser und löst auch, wie diese, das umgekehrte Problem auf: Wenn die Fläche eines regelmässigen Polygons gegeben ist, dessen Seite zu finden. Beim Kreis gibt er das Verhältnis $\frac{22}{7}$. Man findet die falschen Regeln für die Ausmessung der Fläche eines Vierecks und eines Dreiecks wie bei Beda. Die Formel für die Fläche des Dreiecks als Funktion der drei Seiten steht nicht darin, und man findet darin eine andere für das rechtwinklige Dreieck, die nicht genau ist.

In einem Briefe Gerberts an Adalbold, Bischof von Utrecht, wird die Ursache erklärt, warum die „geometrisch“ als Produkt von Grundlinie und halber Höhe berechnete Fläche des Dreiecks eine andere Zahl ist als die „arithmetisch“, d. h. nach der Formel $\frac{1}{2}a(a+1)$ berechnete. Er findet den Grund richtig darin, dass die letztere alle kleinen Quadrate, in welche sie das Dreieck zerlegt, ganz anrechnet, obgleich Teile derselben aus dem Dreieck herausragen.

Ein Brief desselben Adalbold an den Meister, worin er sich die Frage vorlegt, warum ein Kreis von dem umschriebenen Quadrat $\frac{3}{14}$, eine Kugel aber von dem umschriebenen Würfel $\frac{10}{21}$ übrig lasse, zeigt uns das mathematische Denken noch auf seiner ersten Stufe.

Das mathematische Material des 11. und 12. Jahrhunderts bestand aus wenigen geometrischen Sätzen ohne jede Erläuterung, aus den teils falschen, teils nur annähernd richtigen Sätzen der Feldmesser, aus der alle mathematische Klarheit vernichtenden römischen Bruchrechnung, aus einigen populären Notizen über arithmetische Verhältnisse. Alles das wurde in den Schriften der Alten ohne jede Methode vorgetragen und ein mathematischer Beweis war etwas Unbekanntes.

Im 12. Jahrhundert übersetzte Adhelhard, ein englischer Mönch, die Werke Euklids aus dem Arabischen. Diese Uebersetzung zeichnet sich dadurch von früheren ähnlichen aus, dass sie ausser den Sätzen auch die Beweise derselben enthielt, was einen sehr beachtenswerten Fortschritt beweist. Noch weiter verdient aber bemerkt zu werden, dass er dieser Uebersetzung sogar einen Kommentar beigab.

Plato von Tivoli übersetzte um 1120 die Sphärik des Theodosius aus dem Arabischen und ebenso aus dem Hebräischen die Geometrie des Juden Savosarda. Diese Geometrie ist bemerkenswert, weil es scheint, dass durch sie zuerst die Formel für die Fläche des Dreiecks aus den drei Seiten eine grössere Verbreitung erlangt hat; der Verfasser gibt keinen Beweis dazu, erklärt aber, ihn nur seiner Schwierigkeit wegen ausgelassen zu haben.

Das 13. Jahrhundert bezeichnet eine neue Aera in der Geschichte der Mathematik und bereitet ihre Wiederherstellung vor, indem es mehrere wichtige Werke aus der griechischen Schule verbreitet.

Campanus von Navarra brachte den Euklid in arabischer Sprache aus Spanien zurück und übersetzte denselben ins Lateinische, um das Abendland mit den Werken dieses grossen Griechen bekannt zu machen. Es ist zum erstenmal 1482 gedruckt und stand noch lange Zeit nach dem Wiederaufleben der Wissenschaft in grossem Ansehen.

Zu Paris wirkte der Engländer John von Halifax, bekannter unter dem Namen Sacro Bosco (gest. 1256). Sein Hauptwerk ist eine Abhandlung über die Kugel, die im 16. Jahrhundert von dem berühmten Mathematiker Clavius kommentiert worden ist und 400 Jahre hindurch in den Schulen zum Unterricht in der Astronomie gedient hat.

In ähnlicher Weise wie in seinem Liber-Abaci die ganze Arithmetik und Algebra, so fasste Leonardo von Pisa, auch Fibonacci genannt, in seiner Practica geometriae von 1220 alles zusammen, was ihm über die Berechnung der ebenen Figuren, die durch Gerade, oder der räumlichen, die durch Ebenen begrenzt werden, des Kreises und der Kugel aus den Elementen Euklids und den Schriften Archimedes' über Kreismessung und über die Kugel und den Cylinder bekannt war. Von der Trigonometrie, die er aus Ptolemäos und arabischen Quellen wohl kennt, gibt er nur die Elemente, da er nach alter Gewohnheit wesentlichen Gebrauch von den trigonometrischen Funktionen nur in der Astronomie machen will. Von den Sätzen, die man auf Heron zurückzuführen pflegt findet sich nur der Satz von der Fläche des Dreiecks durch die drei Seiten, mit einem eleganten geometrischen Beweis; die Teilung der Figuren nach bestimmten Verhältnissen wird nach der angeblichen Schrift des Euklid de divisionibus, welche die Araber so oft bearbeitet haben, ausführlich behandelt.

An keinem Punkt ist die Euklidische Strenge vernachlässigt und der reiche Stoff ist mit Geschick verarbeitet; hie und da zeigt sich Leonardo sogar originell, so z. B. wenn er zur Rektifikation des Kreises den Umfang des um- und des einbeschriebenen Sechsundneunzigecks auf eine von Archimedes unabhängige und beträchtlich kürzere Weise berechnet; seine beiden Grenzwerte sind:

$$\frac{1440}{458\frac{1}{5}} = 3{,}143, \quad \frac{1440}{458\frac{4}{9}} = 3{,}141,$$

$$\text{Mittelwert } \frac{1440}{458\frac{1}{3}} = 3{,}1418.$$

Leonardo machte in seinem Liber-Abaci Anwendung von der Algebra auf die Geometrie, und es ist dies bei den europäischen Mathematikern der Ursprung für die Einführung der Algebra in die Beweise und Spekulationen der Geometrie. Diese Vereinigung der beiden Wissenschaften, die bei den Griechen so geschieden waren, bildet den eigentlichen Charakter des Werkes von Fibonacci, worin sie nicht allein in Anwendung gebracht wird, sondern worin es ausdrücklich als zur Natur dieser beiden Wissenschaften gehörend ausgesprochen wird, dass sie sich gegenseitig unterstützen müssen.

Im 14. Jahrhundert wurden die vorerwähnten wichtigen Erzeugnisse des 13. Jahrhunderts durchdacht und studiert, um vollständig begriffen zu werden, und es wurden die ersten Anstrengungen gemacht, um die erlangten Kenntnisse anzuwenden und darüber hinauszugehen.

Das einzige nennenswerte Werk des 14. Jahrhunderts ist die Geometria speculativa des durch seine Kenntnisse berühmt gewordenen Thomas von Bradwardin, Erzbischof von Canterbury. Dieselbe wurde 1496 gedruckt und erlebte mehrere Auflagen. Sie zerfällt in vier Teile: Der erste enthält Definitionen, Axiome und Postulate, welche zu Anfang der Elemente des Euklid stehen.

Der zweite Teil behandelt die Dreiecke, Vierecke, den Kreis und die isoperimetrischen Figuren, von denen er folgende Sätze anführt und beweist:

1) Unter allen isoperimetrischen Polygonen ist dasjenige, welches die grösste Anzahl von Winkeln hat, seiner Fläche nach das grösste. 2) Unter allen isoperimetrischen Polygonen, mit gleicher Anzahl von Winkeln, ist dasjenige das grösste, welches gleiche Winkel hat. 3) Unter allen isoperimetrischen Polygonen, die eine gleiche Anzahl von Seiten und untereinander gleiche Winkel haben, ist dasjenige das grösste, welches gleiche Seiten hat. 4) Unter allen isoperimetrischen Polygonen ist der Kreis das grösste. Der Verfasser fügt hinzu, dass die Kugel dieselbe Eigenschaft unter den Körpern besitzt.

Der dritte Teil des Werkes handelt von den Proportionen und der Flächenausmessung des Dreiecks, Vierecks, der Polygone und des Kreises. In Bezug auf die Fläche des letzteren sagt Bradwardin, dass dieselbe gleich sei einem Rechteck, dessen Seiten die halbe Peripherie und der halbe Durchmesser sind $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$. Der vierte Teil handelt von den Figuren dreier Dimensionen, von den Oertern, von den körperlichen Winkeln, von den fünf regulären Körpern und von der Kugel.

Der Bann, der Jahrhunderte lang Europa in Fesseln hielt, wurde gelüftet durch die Erfindung der Buchdruckerkunst in der Mitte des 15. Jahrhunderts, und Fortschritt und Licht behaupteten gegenüber dem Aberglauben und der Finsternis immer mehr das Feld. Hauptsächlich suchte man die griechischen Schriftsteller als Lehrer der Geometrie auf und deswegen übersetzte man sie häufig, am meisten in die lateinische und italienische Sprache.

Purbach[1]) verfertigte neue astronomische Tafeln und ersetzte die Sexagesimalteilung, die die Alten bei den Sehnenberechnungen angewandt hatten, dadurch, dass er den Radius in 100 000 Teile teilte, um so für die Sehnen, die er übrigens auch durch die halben Sehnen oder Sinusse ersetzte, ganze Zahlen zu erhalten.

„Es ist früher angegeben worden, dass die Winkel- oder Kreisteilung bei den Griechen wie bei den Indern dieselbe war, den ganzen Kreisumfang in 360 Grade, die Grade in 60 Minuten u. s. w. Eine Abweichung fand bei der Einteilung des Radius statt, für welchen die Griechen 60 gleiche Teile annahmen und diese Teile wieder in 60 kleinere Teile teilten; die Inder drückten ihn aber in Teilen des Umfangs aus, so dass auf ihn annähernd 3438 Teile kamen. Bei der letzten Weise hatte man ein gemeinschaftliches Mass für die Bögen und Sehnen, und ein Bogen von $57^0 18'$ entsprach der Länge des Radius, überhaupt konnte man hier leicht die Bogenlängen mit geraden Linien vergleichen. Die Trigonometrie scheint nun vor Purbach wenig Beachtung gefunden zu haben, er aber widmete ihr seine ganze Aufmerksamkeit und brachte sie wieder in Aufnahme, und namentlich führte er in das eben angegebene Verhältnis eine wichtige Aenderung ein. Zuerst nahm er, wie die Araber, die indische Methode der Rechnung mit dem Sinus an und führte in einer neuen Sinustafel statt der griechischen Sexagesimalteilung die Dezimalteilung ein, was als ein ebenso wichtiger Fortschritt angesehen werden muss. Es kann kein Zweifel sein, dass er die Arbeiten der Araber gekannt und benützt hat und durch diese auch mit indischen Vorstellungen vertraut geworden ist. So erwähnt er namentlich das Verhältnis von $\sqrt{10}$ zu 1 und 3927 : 1250 als den Indern angehörig, und gibt

[1]) Georg Purbach, so genannt von seinem Geburtsort Peurbach in Bayern, wo er 1423 geboren wurde, studierte in Wien Mathematik und Astronomie. Purbach starb in der Blüte seiner Jahre 1461.

an derselben Stelle ein anderes Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser 377 zu 120, in Graden des letzteren, wie dies von den Indern, nur umgekehrt, geschehen ist, und beide Verhältnisse stimmen ziemlich genau überein, denn 377 : 120 ist von 21600 : 6876 nur wenig verschieden. Bei den Berechnungen folgt Purbach dem Gang des Ptolemäos und beweist in seinen einfachen Bemerkungen eine tiefe Einsicht in geometrischen Dingen.“ [1])

Sein Schüler Regimontanus übersetzte aus dem Griechischen unter anderem die Kegelschnitte des Apollonios, den Archimedes etc. Die Trigonometrie verdankt ihm hauptsächlich ihre jetzige Gestalt. Wie schon sein Lehrer Purbach begonnen und was die Araber schon teilweise durchgeführt hatten, substituierte er an Stelle der ganzen Sehnen die halben oder die Sinusse, vervollkommnete die Berechnung derselben, gab sie in Millionenteilen des Halbmessers an, was schon ein bedeutender Schritt zum Dezimalsystem war, verfertigte Tafeln für alle Grade und Minuten des Quadranten, und führte zum erstenmal den Gebrauch der Tangentenzahlen ein. Was die trigonometrische Auflösung der Dreiecke anbetrifft, worin ebenfalls die Araber schon einiges geleistet hatten, zeigte er sich nicht weniger geistreich in Lösung verschiedener Fälle des rechtwinkligen und schiefwinkligen Dreiecks.

Regimontanus' Schrift: De triangulis etc. (Trigonometrie) wurde lange nach seinem Tode von Joh. Schöner im Jahr 1533 herausgegeben. Das erste Buch beginnt mit Definitionen und allgemeinen Grundsätzen, nächstdem werden als einleitende Sätze die Bedingungen vorausgeschickt, unter welchen Grössen gegeben sind, z. B. wenn eine Linie gegeben ist, so ist auch ihr Quadrat gegeben, und umgekehrt; ist das Verhältnis zweier Grössen gegeben und eine derselben, so ist auch die andere bekannt; wenn von vier proportionalen Grössen beliebige drei gegeben sind, so ist auch die vierte gegeben etc. Mit Satz 20 beginnt die Trigonometrie, zunächst die Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks. Die einzelnen Stücke des Dreiecks werden nur mit Hilfe des Sinus bestimmt, die übrigen Funktionen kommen nicht zur Anwendung. Jeder Satz wird zuerst geometrisch behandelt, daran schliesst sich ein numerisches Beispiel. Alsdann folgen das gleichseitige, gleichschenklige und das beliebige Dreieck. Zunächst wird die Aufgabe, aus den drei gegebenen Seiten die Winkel zu finden, betrachtet. Regimontanus behandelt sie äusserst umständlich. Nachdem er die Winkel untersucht, ob sie rechte, spitze oder stumpfe sind, bestimmt er auf mehrfache Art die beiden Teile, in welche die Basis durch die Senkrechte geteilt wird (nach den Sätzen vom stumpfwinkligen und spitzwinkligen Dreieck, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$ etc.), darauf wird die Höhe gefunden, und nun erst die Winkel. Hieran reihen sich die übrigen Aufgaben: aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die andern Stücke des Dreiecks zu finden; ferner aus zwei Seiten und dem der einen Seite gegenüberliegenden stumpfen Winkel (liegt der einen Seite ein spitzer Winkel gegenüber, so ist die Bestimmung des Dreiecks nicht ausreichend; ist dazu noch die Lage der Senkrechten bekannt, so ist das Dreieck bestimmt), aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel. Das zweite Buch beginnt mit dem Satz, dass die Seiten eines geradlinigen Dreiecks sich wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten. Daran reihen sich viele Aufgaben über das ebene Dreieck, die Regimontanus fast sämtlich sozusagen analysierend behandelt. Nur bei zweien, die er geometrisch nicht lösen kann, macht er von der Algebra Gebrauch. Die eine dieser Aufgaben ist: Wenn die Senkrechte, die Basis und das Verhältnis der Seiten gegeben sind, eine jede der Seiten zu

[1]) Arneth.

finden, und die andere: Wenn der Unterschied zweier Seiten, der Unterschied der Abschnitte, in welche die Basis durch die Höhe geteilt wird, und die Höhe gegeben sind, die Seiten des Dreiecks zu finden. In dem dritten Buch folgt die sphärische Trigonometrie. Den Anfang machen die Sätze über die Kugel und Kugelkreise: hieran schliesst sich die Betrachtung des sphärischen Dreiecks im allgemeinen. In dem vierten Buch werden das rechtwinklige und das beliebige sphärische Dreieck behandelt; es finden sich darin die Hauptlehrsätze der sphärischen Trigonometrie. Das fünfte Buch enthält Lehrsätze und Aufgaben, die das sphärische Dreieck betreffen. In den beiden letzten Büchern gebraucht Regimontanus eine eigentümliche Bezeichnung der Grade und Minuten, die auch in seinen Briefen wiederkehrt: er bezeichnet $\overline{25} \cdot 40 = 25^0 40'$. — Im allgemeinen ist als charakteristisch für das eminente Talent Regimontanus' hervorzuheben, dass die Behandlung der Trigonometrie, wie sie in dem besprochenen Werke vorliegt, in ihren Grundzügen bis auf die Gegenwart unverändert beibehalten worden ist.

Aus dem Nachlass Regimontanus' sind hier noch zwei Schriftchen erwähnenswert, in deren erster Regimontanus ein anziehendes Bild über sämtliche mathematische Wissenschaften, über den Begriff und den Ursprung derselben, den er der Tradition gemäss nach Aegypten verlegt, und über den Zusammenhang, in dem sie untereinander stehen, entrollt. Er erwähnt zugleich bei jeder Disziplin die Hauptschriftsteller des Altertums und der neueren Zeit und charakterisiert ihre Leistungen. Man erstaunt über den gewaltigen Geist, dem das ganze Gebiet der Wissenschaft unterthan ist, der von dem Stand jeder Disziplin Kenntnis hat und jeden Autor mit gesundem Urteil würdigt. So erwähnt Regimontanus in Betreff Euklids, dass er nicht der selbständige Verfasser der Elemente ist, sondern dass er die Schriften seiner Vorgänger in ein Ganzes verschmolzen hat. — Die zweite kleine Schrift, die nur drei Quartseiten umfasst, sollte, wie es scheint, eine Einleitung sein zu einer neuen verbesserten Ausgabe der lateinischen Uebersetzungen Euklids, die Adelhard von Bath und Campanus im 12. und 13. Jahrhundert veranstaltet hatten.[1])

Der Kardinal Nicolas von Cusa, auch Cusanus genannt, ist der erste, der seit dem Wiederaufleben der Wissenschaften dem früher so beliebten Gebiet der Kreisrechnung einige Aufmerksamkeit schenkte. Er gab für die Berechnung des Kreishalbmessers die Formel:

$$a = \frac{p}{2n \cdot \sin \frac{180^0}{n}},$$

worin $n$ die Anzahl der Seiten des einbeschriebenen regelmässigen Polygons und $p$ den Umfang desselben bedeutet. Mit der Quadratur des Kreises gab er sich gleichfalls ab, aber ohne Erfolg.

Gegen das Ende des 15. Jahrhunderts pflegte auch der berühmte deutsche Maler Albrecht Dürer die Geometrie. Sein Hauptwerk sind die Institutiones geometricae, in deren erstem Buch er verschiedene krumme Linien beschreiben lehrt, als z. B. mehrere ebene Schraubenlinien, die cylindrischen, sphärischen, konischen u. a. m., sowie die Kegelschnitte. Im zweiten Buch findet man die Einschreibung der Polygone in den Kreis und verschiedene andere regelmässige Figuren, welche durch Kreisbögen gebildet werden; darauf eine Quadratur des Kreises und die Art, verschiedene Polygone zusammenzufügen, um eine ebene Fläche vollständig auszufüllen. Nachdem er die Konstruktion eines in den Kreis einbeschriebenen Fünfecks gegeben hat, die sich im Almagest des Ptolemäos

[1]) C. J. Gerhardt.

findet, lehrt Dürer ein regelmässiges Fünfeck über einer gegebenen Seite konstruieren; und diese Konstruktion hat das Merkwürdige, dass sie sich mit einer einzigen Zirkelöffnung ausführen lässt, aber nur annähernd ist. Wegen ihrer Leichtigkeit ist sie jedoch vielfach angewandt worden. Das dritte Buch handelt von Körpern, Säulen und Pyramiden und von den Linien, welche man in den Künsten auf ihren Oberflächen zieht. Im fünften Buch gibt der Verfasser die Beschreibung der fünf regulären Körper und anderer Körper, die durch regelmässige Polygone gebildet werden; auch findet man mehrere Auflösungen über die Verdoppelung des Würfels.

„Dürers Schriften kennzeichnen die andere Richtung, die bereits seit den Zeiten Regimontanus' die mathematischen Wissenschaften in Nürnberg genommen hatten: Ihre praktische Verwendung zur Förderung der Künste und zum Gebrauch im Leben. In richtiger Erkenntnis und weiser Voraussicht sorgten dort die Behörden dafür, dass von öffentlich angestellten Lehrern Vorträge über die mathematischen Disziplinen in deutscher Sprache für Handwerker und für alle, die keine gelehrte Bildung besassen, gehalten wurden. Nach allen Seiten hin erscholl dadurch der Ruf Nürnbergs als ein Mittelpunkt mathematischer Bildung.“ [1])

Es bleibt uns noch übrig, von Lucas Paccioli zu sprechen, der allgemein unter dem Namen Lucas de Burgo bekannt ist. Sein Hauptwerk gehört an das Ende des 15. Jahrhunderts und kann als der Ursprung der italienischen Schule betrachtet werden, die so mächtig dazu beigetragen hat, der Mathematik die neue Form zu geben, welche sie bei ihrer Wiedergeburt annahm und welche aus der Vereinigung der indischen Algebra mit der Geometrie der Griechen hervorging. Sein Werk: Summa de Arithmetica, Geometria etc. umfasst im ersten Teil die Arithmetik und Algebra, im zweiten Teil die Geometrie und beruht zum Teil auf den Elementen Euklids. Dieselbe zerfällt in acht Abschnitte, deren Inhalt hier kurz folgen mag: Der erste Abschnitt behandelt die drei- und vierseitigen Figuren grösstenteils nach Euklid. Der Verfasser beweist nach Art der Inder, dass die Dreiecksfläche gleich dem Produkt aus Grundlinie mal halber Höhe ist; er beweist die Formel für die Fläche als Funktion der drei Seiten wie die Araber; er lehrt das Perpendikel in einem Dreieck berechnen und bedient sich dabei des Theorems von den beiden Abschnitten, welche dasselbe auf der Basis bildet. — Im zweiten Abschnitt wird folgendes Problem auf verschiedene Arten gelöst: Wenn die drei Seiten eines Dreiecks gegeben sind und wenn man auf zweien derselben zwei Punkte annimmt, die Länge der geraden Linie zu finden, welche diese beiden Punkte verbindet. — Der dritte Abschnitt behandelt die Fläche des Vierecks und der Polygone. — Der vierte Abschnitt enthält Sätze aus dem dritten Buch des Euklid und die Ausmessung des Kreises $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$. — Der fünfte Abschnitt behandelt die Teilung der Figuren nach gegebenem Verhältnis. — Der sechste Abschnitt bezieht sich auf die Volumina der Körper und enthält die Sätze aus Euklids neuntem Buch. — Der siebente Abschnitt handelt von verschiedenen Instrumenten, mit deren Hilfe man beim blossen Anblick die Dimensionen der Körper messen kann. — Der achte Abschnitt ist eine Sammlung von 100 Aufgaben aus der Geometrie, die meistens durch die Algebra gelöst sind. Oft ist nur das Resultat der Rechnung gegeben, wo es interessant wäre, zu wissen, wie es erlangt worden ist. Eine Aufgabe ist z. B.: Zwei Säcke von gleicher Höhe und gegebenem Inhalt werden der Breite nach zusammengenäht, so dass sie einen Sack bilden; man soll den Inhalt des

[1]) Gerhardt.

neuen Sacks angeben; das Resultat ist: wenn $A$ und $a$ die Inhalte der einzelnen Säcke sind, so hat der neue den Inhalt $A + a + 2\sqrt{Aa}$.

Einige andere von den Aufgaben sind folgende: 1) Wenn zwei Seiten eines Dreiecks und seine Fläche gegeben sind, die dritte Seite zu finden. 2) Wenn die Fläche und die Differenz zweier Seiten eines Rechtecks gegeben sind, dessen Seiten zu finden. Es sei $a^2$ die Fläche und $d$ die Differenz der beiden Seiten, so nimmt Lucas de Burgo für die grössere Seite $x + \frac{d}{2}$ und für die zweite $x - \frac{d}{2}$ an. Dann hat man unmittelbar zur Bestimmung der Unbekannten die Gleichung:

$$x^2 - \frac{d^2}{4} = a^2, \text{ also } x = \sqrt{\frac{d^2}{4} + a^2},$$

woraus sich die Werte für die beiden Seiten ergeben. — 3) Den Durchmesser eines Kreises zu finden, welcher einem Dreieck einbeschrieben ist, wenn von diesem die Seiten bekannt sind.

In allen diesen Aufgaben sind die Data Zahlen und ihre Lösungen sind algebraisch; ebenso sind in den ersten Teilen des Werkes die Figuren immer durch Zahlen ausgedrückt. — Wir haben ferner eine Abhandlung von Burgo „de proportione divina“, welchen erhabenen Titel er dem heutzutage unter dem Namen harmonische Teilung bekannten Verhältnis von vier Punkten einer Geraden beilegte.

Es sei hier noch ein Rechenbuch von Johannes Widmann von Eger erwähnt, welches 1489 zu Leipzig im Druck erschien und nach dem Vorbild der Araber in seinem dritten Teil die Elemente der Geometrie nach Euklid, Boethius und Gerbert enthält. Gleich wie Euklid und seine Nachfolger beginnt Widmann mit Definitionen, die freilich mathematische Schärfe vermissen lassen: „punctus ist ein klein Ding, das nit zu teilen ist.“ — „Angulus ist ein Winkel, der da gemacht ist võ zweien lini“ etc. — Bei der Beschreibung der Vierecke gebraucht Widmann arabische Wörter: er nennt das Rhombus Helmuaym, das Rhomboid Silis helmuaym (aus similis helmuaym korrumpiert), das Paralleltrapez Helmuaripha; die Benennungen waren damals in Gebrauch, bis sie durch die griechischen Wörter verdrängt wurden. — Die Länge der Peripherie wird gefunden, indem man den Durchmesser mit $3\frac{1}{7}$ multipliziert. Für den Inhalt des Kreises gibt Widmann eine vierfache Bestimmung an:

1. Multiplikation des Durchmesserquadrats mit $\frac{11}{14}$.
2. Division des Quadrats des Umfangs durch $12\frac{4}{7}$.
3. Halber Umfang mal Radius.
4. Durchmesser mal Umfang, geteilt durch 4.

Hierauf folgt für das rechtwinklige Dreieck die Bestimmung der Seiten durch den pythagoräischen Lehrsatz, den Widmann jedoch nicht nennt; ferner die Bestimmung der Höhe des gleichseitigen Dreiecks und umgekehrt, der Seite des gleichseitigen Dreiecks aus der Höhe. Dagegen wird der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks nach der unrichtigen Formel $\frac{a^2 + a}{2}$ gefunden, welche in den Schriften der römischen Feldmesser und bei Boethius vorkommt, und

ebenso aus dem Flächeninhalt die Seite. Der Radius des um ein gleichseitiges Dreieck beschriebenen Kreises wird richtig bestimmt. Weiter kommt das Dreieck, dessen Seiten die Zahlen 13, 14, 15 darstellen, zur Betrachtung; es werden die Abschnitte der Grundlinie durch das Höhenperpendikel, die Höhe und der Flächeninhalt als Funktionen der drei Seiten angegeben; ferner die Regel, den Radius des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises zu finden (nach der Formel

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{h^2 + \left(\frac{1}{2}b - x\right)^2 - \left(\frac{1}{2}b\right)^2}{2h}\right)^2}$$

wo $h$ die Höhe, $b$ die Basis und $x$ den kleineren Abschnitt der Basis bezeichnet). Hierauf folgen drei Aufgaben über das gleichseitige Dreieck: aus dem Durchmesser die Seite des in den Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, aus der Seite des gleichseitigen Dreiecks die Peripherie des umschriebenen und des einbeschriebenen Kreises zu bestimmen. Alsdann behandelt Widmann die Aufgaben: die Peripherie des in ein rechtwinkliges Dreieck einbeschriebenen Kreises aus den drei Seiten zu finden; in einen Halbkreis, dessen Durchmesser gegeben, das grösste gleichseitige Dreieck und das grösstmögliche Quadrat einzuschreiben, die letztere auch mit Hilfe der Algebra. Zuletzt kommen die Aufgaben: aus der Seite des einbeschriebenen Quadrats die Peripherie des Kreises, und aus dem Durchmesser den Inhalt des umschriebenen Quadrats zu finden. („Höchst wahrscheinlich hat Widmann die grösste Anzahl dieser Aufgaben irgendwo entlehnt. Er gibt sie nicht ohne Rechenfehler; auch ist die Behandlung etwas verwirrt. Die Vermutung ist nicht ohne Grund, dass diese und ähnliche Aufgaben von den deutschen Mathematikern des 15. Jahrhunderts gelöst worden waren. Die Briefe Regimontanus' beweisen, dass es damals Sitte war, solche Aufgaben zur Lösung vorzulegen. Aus Ad. Rieses Algebra geht hervor, dass es herumziehende Mathematiker gab, die Aufgaben lösten und sich dafür bezahlen liessen.“ [1]) In dem nun folgenden zweiten Teil der Geometrie, in welchem Widmann das Ausmessen geometrischer Figuren lehren will, führt er Julius Frontinus als seine Quelle an. „Als höchst auffallend ist hervorzuheben, dass Widmann in diesem Teil die falschen Regeln der römischen Feldmesser zur Bestimmung des Inhalts der einfachsten ebenen Figuren angibt; er setzt z. B. den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks $= \frac{1}{2}a^2$, wenn $a$ die Seite des Dreiecks bezeichnet; er bestimmt den Flächeninhalt des Paralleltrapezes aus der halben Summe der parallelen Seiten in die anliegende schiefe Seite; er nimmt an, dass der Inhalt eines aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzten Rhombus dem Quadrat einer Seite gleich ist; er leitet den Inhalt der regulären Polygone aus den Formeln für die Polygonalzahlen her etc. Neben diesen falschen Bestimmungen finden sich aber auch manche richtige. Das Ganze schliesst mit einer Sammlung von Beispielen, die sich sämtlich auf vorkommende praktische Fälle beziehen, z. B. wieviel Steine von bestimmter Grösse zum Bau einer Mauer gehören oder zu einem Pfeiler von einem gewissen Umfang; ferner über die Anlegung eines Brunnens, über die Aufstellung eines Zeltes etc. Trotz dieser Ausstellung muss Widmanns Rechenbuch doch als eine beachtenswerte Erscheinung in der mathematischen Litteratur betrachtet werden.“ [2])

[1]) und [2]) Gerhardt.

# Das 16. Jahrhundert.

„Die Geometrie im Laufe des 16. Jahrhunderts unterscheidet sich in einer Hinsicht wesentlich von der der Griechen, nämlich darin, dass sie nur mit numerischen Datis operiert, so wie wir schon bei dem Werk des Lucas de Burgo gesagt haben. Es war dieses eine natürliche Folge von der innigen Vereinigung dieser Wissenschaft mit der Algebra, eine Vereinigung, die nur bei numerischen Datis möglich war; denn die Algebra war damals nur eine höhere, ausschliesslich numerische Arithmetik, welche sich von der gewöhnlichen Arithmetik wesentlich nur durch den Gebrauch der Regel von den Zeichen und durch den Mechanismus der Gleichungen unterschied; sie war nicht eine Wissenschaft der abstrakten Symbole, wie Vieta sie darstellt. Die Operationen und die Kunstgriffe des Kalküls, welche die Beweise vereinfachten und welche die von allen griechischen Geometern ausschliesslich gebrauchten geometrischen Betrachtungen ersetzten, waren also im 16. Jahrhundert nur möglich, wenn die Geometrie an numerischen Beispielen gebildet wurde. Dieses ist bis auf Vieta geschehen, wie man es in allen Werken dieser Periode sieht, die für die Geschichte der Wissenschaft eine der merkwürdigsten ist. Man sieht aber, dass auf diese Weise die Geometrie die Reinheit der Form, sowie auch den Charakter der Allgemeinheit und Abstraktion verloren hat, an die sich die Alten anschlossen und welche dieser Wissenschaft anzugehören schienen. Und wenn dieses in einer Hinsicht reelle Vorteile hatte, so hatte es auch in anderer Hinsicht sehr üble Folgen, da einerseits der Geist, der mit Zahlen operierte, die Objekte, welche sie darstellten, aus den Augen verlor, und weil man andererseits bei der Ausführung der Rechnung den Gang und den Faden des Raisonnements verlor.“

„Die Geometrie der Griechen erlitt also eine wirkliche Verschlechterung, aber eine sehr glückliche Verschlechterung, weil sie Vieta in diesem Zustand erhalten musste, um seine grosse Idee der Buchstabenalgebra darauf anzuwenden und ihr so ihre ganze ursprüngliche Reinheit und Abstraktion wieder zu geben, während sie nichtsdestoweniger alle Vorteile, die sie durch den Kalkül überkommen konnte, beibehielt. Aber es ist sehr merkwürdig, dass man, um zu diesem grossen Resultat, zu dieser Vervollkommnung der griechischen Geometrie zu gelangen, durch diesen Zustand der Verschlechterung gehen musste, der dieser Wissenschaft ihren Charakter der Abstraktion und Allgemeinheit raubte und sie zum Range konkreter und numerischer Operationen herabsteigen liess.“ [1])

Einer der ersten Geometer Deutschlands, das gerade auf diesem Gebiet eine grosse Menge von Namen aufzuweisen hat, ist Johannes Werner von Nürnberg. Er lebte im Anfang des 16. Jahrhunderts und ist vielleicht der einzige aus der grossen Reihe der Mathematiker jener Zeit, die sich auf einen etwas höheren Standpunkt zu stellen vermochten. Sein Abriss der Theorie der Kegelschnitte behandelt die Eigenschaften der Parabel und Hyperbel nebst deren Konstruktionen in der Ebene. Er lässt die Kurven am gleichseitigen Kegel entstehen, den er durch Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten beschreibt, oder auch dadurch, dass er in der Ebene einen Kreis und ausserhalb derselben einen Punkt annimmt, durch welchen bis zur Peripherie eine unbegrenzte Gerade geht, die auf der Peripherie herumgeführt wird. Er betrachtet die Kurven unmittelbar an der Kegeloberfläche und entwickelt die

[1]) Chasles.

Theoreme durch rein geometrische Betrachtungen aus dem Kegel, ein Verfahren, das ihm eigentümlich ist und bei den Geometern des Altertums nicht vorkommt. Eine zweite Schrift von Joh. Werner enthält eine Bearbeitung der 11 aus dem Altertum überlieferten Lösungen des bezeichneten Problems über die Verdoppelung des Würfels. Werner hat 12 Anhänge hinzugefügt, in welchen er eine Anzahl stereometrischer Aufgaben behandelt, z. B. einen Kubus zu konstruieren, der einem gegebenen Parallelepipedon gleich ist, ein Parallelepipedon in einen Cylinder von gleicher Höhe zu verwandeln, einen Cylinder in einen Kubus zu verwandeln. In dem 11. Anhang zeigt Werner, dass die Sonnenstrahlen an der Erde als parallel zu betrachten sind; im 12., dass ein parabolischer Spiegel die Sonnenstrahlen nach einem Punkt der Axe wirft, der um den vierten Teil des Parameters vom Spiegel entfernt ist. In derselben Schrift beschäftigt er sich mit der Lösung des alten Problems, eine Kugel durch eine Ebene nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen.[1])

Tartaglia[2]) suchte die Geometrie mehr zu verbreiten und bereicherte sie auch durch einige wichtige Sätze. Seine im Jahr 1556 zu Venedig herausgegebene mathematische Schrift gibt hierüber die nötige Auskunft. Ausser seinen Uebersetzungen des Euklid und Archimedes hat man von ihm das Werk „de numeris et mensuris“, das eine grosse Menge geistreicher Sätze und Aufgaben in sich schliesst. Unter andern verdankt man ihm auch die Berechnung der Dreiecksfläche aus den drei Seiten. Tartaglia nimmt unter den Geometern Italiens die hervorragendste Stellung mit ein.

Des 16. Jahrhunderts grösster Geometer ist unstreitig Maurolycus von Messina. Er ist der erste, der das vollendete Werk des grossen Apollonios mit neuen Erfindungen bereichert hat. (Diese Schrift wurde ca. 100 Jahre später, 1654 von Borellus wieder herausgegeben, und de la Hire erweiterte und bereicherte dieselbe durch nützliche Anmerkungen im Jahr 1679.) Er stellte das verlorengegangene fünfte Buch des Apollonios „de maximis et minimis“ wieder her. Sein Hauptverdienst ist aber seine ausgezeichnete Behandlung der Kegelschnitte, die er in Verbindung mit dem Kegel selbst betrachtete. Vor allem hat er die Theorie der Tangenten und Asymptoten, die von Apollonios am wenigsten berücksichtigt wurden, in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen und dieselben auf sehr geistreiche Weise mit verschiedenen physikalischen und astronomischen Problemen in Bezug gebracht. Seine geometrische Behandlungsweise, die in Bezug auf Eleganz und Klarheit nichts zu wünschen übrig lässt, hat lange Zeit nachher unter den grössten Mathematikern Nachahmer gefunden. Seine Blütezeit fällt in die Mitte des 16. Jahrhunderts.[3])

Der Portugiese Nonius, eigentlich Pedro Nuñez, ein Zeitgenosse des Maurolycus, zeigte sich ebenfalls als scharfsinniger Geometer. Ihm verdanken wir die Unterabteilung der kleinen Teile eines Instruments durch besondere Linien und Bögen, welche man noch immer die Abteilung des Nonius oder auch den Nonius schlechthin nennt. Diese Erfindung ist 1631 durch den Franzosen Peter Vernier dadurch verbessert worden, dass er an einer unbeweglichen geradlinigen Skala oder an einem unbeweglichen Bogen eine bewegliche geradlinige Skala oder einen beweglichen Bogen anbrachte, woran man die einzelnen Teile leicht sehen konnte, weil das bewegliche Stück etwa in 10 — 1 oder in

[1]) Gerhardt.

[2]) Nicolaus Tartaglia war aus Brescia und von armen Eltern gegen das Ende des 15. Jahrhunderts geboren. Schon als Kind hatte er das Unglück, von einem französischen Soldaten auf schreckliche Weise verwundet und verstümmelt zu werden, so dass er selbst lange Zeit der Sprache beraubt war. Elend und Missgeschick waren seine Gefährten.

[3]) Nach Suter.

12—1 Teile geteilt war, wenn man das unbewegliche in 10 oder 12 gleiche Teile geteilt hatte.

Peter Ramus (geb. 1515, gest. 1572) ist der berühmteste der französischen Geometer jener Periode. Seine mathematischen Schriften gehen allerdings wenig über die Leistungen des Altertums hinaus, aber ihre Klarheit und philosophische Tiefe zeugen von dem ausserordentlichen Geist dieses Mannes. Man hat von ihm die Scholae mathematicae in 31 Büchern, deren drei erste über die Geschichte und den Nutzen der Mathematik handeln; in den übrigen unterwirft er die verschiedenen Bücher Euklids und seine Methode einer genauen Kritik und hat dann auch in seiner Arithmetik und Geometrie einen andern Weg eingeschlagen, als es Euklid in seinen Elementen gethan hat, fand aber dafür keine Anhänger.[1])

Sein Landsmann Fernel (gest. 1556) hat sich dadurch einen Namen erworben, dass er es unter den Neueren zuerst versuchte, die Grösse der Erde auszumessen. Aus der Zahl der Umläufe eines Wagenrads auf dem Wege von Paris nach Amiens schätzte er die Länge eines Meridiangrades auf 56746 pariser Toisen (= 110598 m). Er war nämlich solange gefahren, bis der Polarstern um einen Grad weiter emporgerückt war. Dass jenes Resultat der Wahrheit sehr nahe kam ($1^0$ = 15 geogr. Meilen à 7420 m = 111300 m), konnte freilich nicht der Genauigkeit einer solchen Messung, sondern bloss dem Zufall zugeschrieben werden.

Michael Stifel (geb. 1487 zu Esslingen, gest. 19. April 1567 zu Jena) behandelt in den beiden letzten Kapiteln des zweiten Buches seiner Arithmetica integra nach Ptolemäos die Aufgabe, aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises die Grösse der Seiten der einbeschriebenen regulären Polygone, des Zehnecks, Sechsecks, Fünfecks etc. zu finden und nach dem 13. und 14. Buch der Elemente des Euklid die Grösse der Kanten der fünf regulären Körper durch den Durchmesser der umschriebenen Kugel auszudrücken. In einem Anhang zum zweiten Buch bespricht Stifel die Quadratur des Kreises, den er als ein Polygon von unendlich vielen Seiten auffasst; er erklärt sie für unmöglich, dagegen hält er die Quadratur eines materiellen Kreises für ausführbar, so dass sie der sinnlichen Wahrnehmung genügt. Bezeichnend für die sophistischen unmathematischen Schlüsse jener Zeit ist wohl ein Beweis für die Quadratur des Zirkels, den Stifel in sein Buch, als von früheren Mathematikern herrührend, aufgenommen hat. Er lautet: Es gibt ein Quadrat grösser als ein gegebener Kreis und auch eines kleiner; folglich auch eines ebenso gross.

Die niederländischen Geometer Simon Van-eick, Adrianus Romanus und Ludolph van Ceulen haben sich besonders mit der Berechnung des Verhältnisses von Kreisumfang und Durchmesser beschäftigt, und der letztere hat dasselbe sogar auf 35 Dezimalstellen genau berechnet, so dass diese Zahl lange Zeit nach ihm allgemein die Ludolphsche genannt wurde. Der erstgenannte Mathematiker war einer von den vielen Gelehrten des Jahrhunderts, die die Unmöglichkeit von der Quadratur des Zirkels noch nicht einsehen wollten. Es wäre unmöglich, alle Namen hier aufzuzählen, die die Geschichte dieses Problems als seine Verfechter aufzuweisen hat. Aber es ist bezeichnend für den Charakter jener Zeit und den Höhepunkt der Entwickelung der Geometrie, wenn ein Problem, das schon die Geometer des Altertums als unlösbar erkannten, 17 Jahrhunderte nachher die höchste Blüte erreichte und selbst Männer zu seinen Anhängern zählte, die unter die hervorragendsten Mathematiker gestellt wurden.[1])

---

[1]) Suter.

Clavius (gest. 1612) verdient auch durch sein reiches Wissen in die vorderste Reihe der deutschen Mathematiker jener Zeit gestellt zu werden. Seine Abhandlungen sind sehr zahlreich, sowie sein Kommentar alter Geometer, besonders des Euklid, zu den vorzüglichsten gezählt werden.

Noch sind zu erwähnen die Verdienste des Peter Apianus um die Geometrie, besonders die Trigonometrie. Er publizierte im Jahr 1534 eine Uebersetzung des arabischen Mathematikers Geber-ben Aphla, des berühmten Förderers der Trigonometrie.

Nur wenige der angeführten Geometer haben die Wissenschaft mit neuen Resultaten und Erfindungen bereichert, die Mehrzahl derselben hat bloss allgemeine Lehrbücher, Kommentare und Ergänzungen geliefert. Aber keine Zeit ist vielleicht reicher an Werken jeden Inhalts, an allen möglichen Abhandlungen auf dem Felde der Geometrie, als gerade diese. Aber erst die durch Vieta angebahnte Anwendung der Algebra auf die Geometrie hat dieser Wissenschaft einen neuen, mächtigen Impuls gegeben und dem grossen Descartes den Weg zu unsterblichem Ruhm geöffnet.

Vieta (1540—1603) aus Fontenay restituierte das Werk des Apollonios von den Berührungen (de tactionibus), worin er zuerst das Problem, einen Kreis zu konstruieren, welcher drei in einer Ebene gegebene Kreise berührt, womit sich damals die Geometer beschäftigten und welches viel Schwierigkeiten machte, auflöste.

„Die sphärische Trigonometrie wurde von Vieta durch die nützlichsten Sätze vervollständigt, und eine neue und höchst glückliche Idee von Vieta ist die Transformation eines sphärischen Dreiecks in ein anderes, dessen Winkel und Seiten auf gewisse Weise den Seiten und Winkeln des gegebenen entsprechen. Er sagt: „Wenn man für die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks als Pole Bögen grösster Kreise beschreibt, so wird das hierdurch entstandene Dreieck das reciproke von dem ersten sowohl in Bezug auf die Winkel als auf die Seiten.“

Besonders aber ist Vieta berühmt durch die ausserordentlich glückliche Umgestaltung, welche er mit der Geometrie vornahm und die notwendig war, um der Geometrie in ihrer ganzen Ausdehnung die Unterstützung zu sichern, welche ihr die Wissenschaft des Kalküls gewähren konnte. Dieselbe bestand darin, dass Vieta zuerst die allgemeine Bezeichnungsart durch Buchstaben für bekannte wie für unbekannte Grössen in die Algebra einführte und letztgenannte Wissenschaft in dieser neuen Form auf die Geometrie anwandte, welcher Verbindung wir auf dem Gebiet beider Disziplinen die schönsten Erfolge zu verdanken haben. Schon die früher erwähnte Zurückführung der Gleichungen zweiten Grades auf Aufgaben über Proportionen und Proportionallinien können wir gleichsam als Einleitung zu diesem neuen Felde betrachten. Doch geht Vieta schon viel weiter. Auch die Gleichungen dritten Grades sucht er auf geometrische Probleme zurückzuführen und zu konstruieren, und gelangt dabei zu den schönsten Resultaten. Vieta fand, dass die Konstruktion der Gleichungen dritten Grades im allgemeinen gleichbedeutend sei mit der Auflösung der alten beiden Probleme, der Verdoppelung des Würfels und der Dreiteilung des Winkels, bekanntlich Aufgaben, die nur durch Kegelschnitte oder Kurven höherer Ordnung gelöst werden können. Interessanter aber ist die Erfindung Vietas, dass das erstere Problem die Lösung aller kubischen Gleichungen in sich schliesst, bei denen die Quadratwurzel in der Cardanischen Formel reell ist; das zweite Problem aber nur den irreduktiblen Fall. Die Lösung dieses letzteren beruht auf folgender Konstruktion: Man sucht die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel aus den Koeffizienten der kubischen Gleichung abgeleitete Werte

haben, und dessen Winkel an der Grundlinie 1/3 desjenigen eines andern gleichschenkligen Dreiecks ist, dessen sämtliche drei Seiten aus den gegebenen Koeffizienten der Gleichung konstruiert sind. Diese Basis ist eine Wurzel der Gleichung: die andern beiden erhält man sofort durch einfache lineare Konstruktion. Wie gesagt, ist jene Teilung geometrisch nur möglich mit Hilfe der Kegelschnitte oder von Kurven höheren Grades, wie die Konchoide des Nikomedes.[1])

In diesen und anderen interessanten analytisch-geometrischen Untersuchungen Vieta's liegt der erste Keim der analytischen Geometrie, deren Ausbildung zu einem vollkommenen System dem grossen Descartes aufbewahrt war. — Allerdings waren die Araber die Vorgänger Vietas auf diesem Gebiet; allein zur Ehre des französischen Mathematikers muss hier bemerkt werden, dass derselbe damals von den Leistungen der Araber nichts wusste.

„Die Geometrie nahm in diesem Jahrhundert nicht jenen gewaltigen Aufschwung wie die Algebra, aber die glänzenden Resultate der letzteren, sowie das Erwachen der humanistischen Bildung und das dadurch herbeigeführte genaue Studium der alten Geometer vermochten auch der Geometrie neue Bahnen zu eröffnen, und so müssen wir das 16. Jahrhundert als ein solches betrachten, welches in der Geschichte der Geometrie eine Epoche der Vorbereitung und des Uebergangs bezeichnet, worin sich die neue Form, welche die Mathematik angenommen hat, herausarbeitete. Wir müssen hinzufügen, dass die Inder und Araber einen grossen Teil an dieser Umformung und Vervollkommnung hatten, weil sich der Keim davon in ihrem Prinzip der Anwendung der Algebra auf die Geometrie findet, welches sie selbst in ihren Arbeiten vieler Jahrhunderte entwickelt haben.“

Noch ist hier eines von seinen Zeitgenossen hochgestellten Mannes zu gedenken, welcher neben einem vorzüglichen Praktiker zugleich ein tüchtiger Mathematiker war und nicht bloss als solcher zuerst auf die Vorteile der Dezimalbruchrechnung aufmerksam gemacht hat, sondern, nach dem vollgültigen Zeugnis eines Kepler, als der erste Entdecker der Logarithmen anzusehen ist. Jost Bürgi, geb. 1552 zu Lichtensteig in Toggenburg, erlernte die Uhrmacherkunst und kam als wandernder Handwerker nach Kassel, wo er 1579 die Stelle eines Hof-Uhrmachers erhielt. Da Bürgi neben einem vorzüglichen praktischen Geschick sehr bald ein ausgezeichnetes mathematisches Talent entwickelte, so wurde er vom Landgrafen Wilhelm IV. dem Astronomen Rothmann als Gehilfe beigegeben. Dadurch kam er, bei dem lebhaften wissenschaftlichen Verkehr, der damals am Kasseler Hofe stattfand, mit den ersten Astronomen seiner Zeit in Berührung. Durch mündliche Mitteilung und durch eigenes Nachdenken gewann er die theoretische Bildung, die er wegen mangelnder Kenntnis des Lateinischen aus Büchern sich nicht verschaffen konnte. 1603 folgte er einem Antrag, als Kammer-Uhrmacher in die Dienste des Kaisers Rudolph II. zu treten, wo er mit Kepler zusammentraf. 1631 kehrte Bürgi nach Kassel zurück, wo er 1632 starb. Die Resultate seiner Arbeiten sind grösstenteils nur durch Mitteilungen in den Schriften seiner Schüler und der ihm befreundeten gleichzeitigen Schriftsteller enthalten. Er selbst hat nur seine „Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen“ veröffentlicht. Der von ihm erfundene Proportionalzirkel wurde von Levinius Hulsius 1601 beschrieben; das geometrische Triangularinstrument zum Behuf der Konstruktion von Dreiecken erst 1648 bekannt. Als praktischer Astronom richtete er seine Studien auf die Vervollkommnung der Trigonometrie und der trigonometrischen Tafeln. Kepler erwähnt in einem Brief einen von Bürgi gefundenen trigonometrischen Satz, dass nämlich die Quadrate

[1]) Suter.

der Sinus eines Bogens sich verhalten wie die Sinus versus des doppelten Bogens $\left(2 \sin^2 \cdot \frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha\right)$. Infolge der vervollkommneten trigonometrischen Formeln erkannte man allgemein, dass die vorhandenen trigonometrischen Tafeln für ein genaueres Rechnen nicht mehr ausreichten: Bürgi beschloss eine neue Sinustafel auf acht Dezimalstellen von 2″ zu 2″ zu berechnen, und wir wissen aus dem Zeugnis Keplers, dass er sein Vorhaben wirklich ausgeführt. Bürgis Tafel ist niemals gedruckt worden und scheint verloren zu sein; die Einleitung dazu ist zum grössten Teil noch im Manuskript unter den Handschriften Keplers vorhanden.

Bisher hatte man mit Hilfe der im Kreis geometrisch konstruierbaren regulären Figuren und durch Halbierung der Bogen die Sehnen und daraus die Sinus berechnet; ferner hatte man für sehr kleine Winkel Bogen und Sehne gleichgesetzt und die übrigen Sinus, die auf solche Weise nicht erhalten wurden, proportional nach den zunächstliegenden ergänzt. Dies Verfahren erschien Bürgi zu weitläufig und zu ungenau; durch eine Schrift Ludolphs van Ceulen wurde er darauf geführt, mit Hilfe der Algebra die Teilung eines Winkels in beliebig viele gleiche Teile zu versuchen. In der noch vorhandenen Einteilung zu der Sinustafel verbreitet sich Bürgi über den Weg, den er dabei eingeschlagen hat. Er bemerkt, dass es vorteilhaft sei, den Radius $= 1$ zu nehmen, insofern man alsdann die Sinus als echte Dezimalbrüche erhält, mit denen leicht zu rechnen ist, da nur ihre Zähler berücksichtigt zu werden brauchen. Hierauf folgt die Bestimmung der Sehne der Hälfte und des dritten Teils eines Bogens, dessen Sehne bekannt ist. Für die erstere findet Bürgi die Formel, dass die Sehne des halben Bogens ($x$) zur Sehne des ganzen Bogens sich verhält wie $x : \sqrt{4x^2 - x^4}$; um die Sehne des dritten Teils zu ermitteln, geht er von dem bekannten Ptolemäischen Lehrsatz aus und erhält das Verhältnis $x : 3x - x^3$, wo wiederum $x$ die Sehne des dritten Teils bezeichnet, beides unter der Bedingung, dass der Halbmesser $= 1$ ist. Mit Hilfe dieser beiden Bestimmungen ermittelt Bürgi die Sehnen des vierten, fünften, sechsten etc. Teils eines Bogens; er verfährt dabei ebenso wie vorher analytisch, er nimmt die Sehne eines jeden Teils als gefunden an und sucht die Sehne des ganzen Bogens. Er erhält auf diese Weise, wenn $x$ die Sehne des vierten Teils eines Bogens bezeichnet, die Relation für das Quadrat der Sehne des vierten Teils zum Quadrat der Sehne des ganzen Bogens

$$= x^2 : 16x^2 - 20x^4 - 8x^6 - x^8;$$

bezeichnet ferner $x$ die Sehne des fünften Teils eines Bogens, so verhält sich diese zur Sehne des ganzen Bogens

$$= x : 5x - 5x^3 + x^5.$$

Bürgi schliesst diese Untersuchung mit einer Tafel, in welcher er zeigt, wie man unter der Annahme, dass der Radius $= 1$, lediglich durch Addition das Verhältnis der Sehne irgend eines Teils zur Sehne des ganzen Bogens finden kann.

Nun wendet sich Bürgi zur Ermittelung des Wertes der Unbekannten. Er zeigt zunächst auf scharfsinnige Weise, wieviele Werte der Unbekannten aus der betreffenden Gleichung sich ergeben. Jeder Sehne entsprechen zwei Bogen, ein grösserer und ein kleinerer; so gehört z. B. zu derselben Sehne der Bogen von $60^0$ und $300^0$, und analog dieselbe Sehne zu Bogen von $360^0$ und $0^0$. Da demnach die Sehne von $360^0 = 0$, d. i. ein Punkt in der Peripherie ist, und da analog eine jede andere Sehne einen Punkt in der Peripherie hat, so kann man sie gewissermassen als aus zwei Teilen bestehend betrachten; der eine ist ein Punkt in der Peripherie, dem der Bogen von $360^0$ entspricht; der andere ist

die Sehne selbst. Hieraus ergibt sich, dass zu jeder Sehne ein Bogen gehört, der aus der ganzen Peripherie und dem grösseren oder kleineren Bogen des durch die Sehne geteilten Kreises besteht. Insofern nun aber eine Sehne, die $= 0$ ist, unendlich vielen Sehnen, die ebenfalls $= 0$ sind, als gleich betrachtet werden kann, so wird auch an die Stelle des einen ganzen Kreises eine unendliche Anzahl Kreise treten können. Dies vorausgeschickt, unterscheidet Bürgi zwei Fälle, ob nämlich ein Bogen, dessen Sehne bekannt ist, oder ob die ganze Peripherie in eine Anzahl gleicher Teile geteilt werden soll. Im ersten Fall wird der algebraische Ausdruck, welcher das Verhältnis der Sehne des gesuchten Bogens zur Sehne des ganzen Bogens darstellt, eine bestimmte Zahl, im zweiten $= 0$ sein. Er findet für den ersten Fall, dass die Unbekannte höchstens soviele Werte hat, als der Bogen geteilt werden soll. Ist z. B. der Bogen von $60^0$ oder $300^0$ in fünf gleiche Teile zu teilen, so entsprechen offenbar der Sehne eines Fünfteils des kleineren Bogens die Bogen von $12^0$ und $348^0$, der Sehne eines Fünfteils des grösseren die Bogen von $60^0$ und $300^0$. Dies sind zwei Werte der Unbekannten. Die andern Werte werden gefunden, indem man zu $60^0$ den ganzen Umfang hinzunimmt, also $60^0 + 360^0 = 420^0$; davon ein Fünftel $= 84^0$. Die Sehne dieses Bogens oder des Bogens von $276^0$ ist der dritte Wert der Unbekannten. Verfährt man ebenso mit dem grösseren Bogen, so ist

$$\frac{1}{5}(300^0 + 360^0) = 132^0;$$

mithin ist die Sehne dieses Bogens oder von $228^0$ der vierte Wert der Unbekannten. Setzt man ferner zwei Peripherien zu $60^0$, so ist

$$\frac{1}{5}(60^0 + 720^0) = 156^0;$$

die Sehne dieses Bogens oder von $204^0$ ist der fünfte Wert der Unbekannten. Verfährt man ebenso mit dem grösseren Bogen von $300^0$, also

$$\frac{1}{5}(300^0 + 720^0) = 204^0,$$

so ist die Sehne dieses Bogens kein neuer Wert der Unbekannten. Es ergeben sich also fünf Werte der Unbekannten, wie es auch der Grad der betreffenden Gleichung erfordert. Dies findet nicht statt, wenn die ganze Peripherie in irgend eine Anzahl gleicher Teile geteilt werden soll. Ist z. B. die ganze Peripherie in fünf gleiche Teile zu teilen, so entsprechen der Sehne eines Fünfteils die Bogen von $72^0$ oder $288^0$; nimmt man zur ersten Peripherie eine zweite hinzu, so gehören zur Sehne eines Fünfteils die Bogen von $144^0$ oder $216^0$; teilt man drei Peripherien in fünf gleiche Teile, so ist davon $^1/_5$ der Bogen $216^0$; mithin keine neue Sehne etc. Es kommen also der Unbekannten nur zwei Werte zu, welche den zwei verschiedenen Sehnen der Fünfteilung eines Kreises entsprechen. Ebenso ergeben sich drei Werte der Unbekannten aus der Gleichung für die Sehne eines Siebentels der ganzen Peripherie. Bürgi bemerkt nicht, dass diese Werte der Unbekannten die Seiten der regulären Polygone zugleich mit den Seiten der zugehörigen Sternpolygone darstellen. Es geschieht dies von Kepler in dem ersten Buch der Harmonice mundi, wo er von den regulären Figuren handelt; er reproduziert daselbst die Untersuchungen Bürgis, freilich nur um zu zeigen, dass die Teilung des Kreises in sieben gleiche Teile mit Hilfe der Algebra den Ansprüchen der Geometrie nicht genüge, insofern nicht ein, sondern mehrere Werte der Unbekannten sich ergeben. — Um nun den Sinus für alle geraden Sekunden aufs kürzeste und schärfste zu berechnen, teilt Bürgi die

Peripherie in 324000 gleiche Teile. Die Zahl 324000 ist aber $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ und so teilt Bürgi die Peripherie zuerst in zwei, die Hälfte in drei, den Bogen von $60^0$ wiederum in drei, den Bogen von $20^0$ in fünf, die Bogen von $4^0$ und $2^0$ in zwei gleiche Teile und erhält so den Bogen von $1^0$; darauf teilt er den Bogen von $2^0$ in fünf, den Bogen von 24′ in drei, die Bogen von 8′, 4′ und 2′ in zwei gleiche Teile und findet den Bogen von 1′; endlich teilt er den Bogen von 2′ in fünf, den Bogen von 24″ in drei, den Bogen von 8″ in zwei gleiche Teile und kommt so auf den Bogen von 4″. Dies ist der kürzeste Weg, um zu dem Sinus von $1^0$, 1′, 2″ zu gelangen. Will man bloss den Bogen von zwei Sekunden haben, so teilt man so: $360^0$. $180^0$, $90^0$, $45^0$, $22^1/_2{}^0$, $11^1/_4{}^0$, $3^0 45'$, $1^0 15'$, 25′, 8′20″, 1′40″, 20″, 4″. Nachdem Bürgi noch über einige Vorteile in Betreff der Auflösung der Gleichungen für die Sehnen des Kreises gehandelt und wie aus einer Sehne eine andere gefunden werden kann, schliesst das vorhandene Manuskript mit der Anweisung, wie mittels Differenzen die Sinustafel zu berechnen ist.[1])

Seitdem Peuerbach und Regimontanus das Studium der Astronomie geweckt und zugleich die nötigen Hilfstafeln geschaffen, wurde diese Wissenschaft in Deutschland das 16. Jahrhundert hindurch unausgesetzt mit besonderer Vorliebe kultiviert. Wir begegnen zuerst einer Sinustafel von Minute zu Minute für den Radius = 100 000 in Apians Schrift. Nächstdem finden wir bei Kopernikus eine Sinustafel von 10′ zu 10′ für den Radius 100 000. Das grösste Verdienst um die Vervollkommnung trigonometrischer Tafeln hat sich Georg Joachim[2]) mit dem Beinamen Rheticus erworben. Bisher hatte man die trigonometrischen Funktionen immer zu den Kreisbogen in Beziehung gesetzt, er war der erste, der das rechtwinklige Dreieck konstruierte und sie dadurch in unmittelbare Verbindung mit den Winkeln brachte. Diese neue Anschauung bewog ihn auch, die barbarischen Ausdrücke Sinus, Kosinus zu verwerfen, er gebrauchte dafür perpendiculum, basis. Ferner wurde Rheticus durch das rechtwinklige Dreieck auf die Berechnung der Hypotenuse geführt, d. h. er hat zuerst eine Tafel der Sekanten aufgestellt. Aber nicht nur für die ebene Trigonometrie hat Rheticus eine neue Bahn gebrochen, er hat auch durch eine rein geometrische Abhandlung über die rechtwinkligen Kugeldreiecke Vorzügliches geleistet. Noch viel mehr ist die unglaubliche Mühe hervorzuheben, welche er auf die grösstmögliche Vervollkommnung der trigonometrischen Tafeln verwandte. Rheticus nahm den Radius = 10 000 Millionen und berechnete die sämtlichen Funktionen von 10″ zu 10″. Um über die Richtigkeit der letzten Stellen sicher zu sein, hatte er eine Sinustafel für den Halbmesser = 1 00000 00000 00000 mit den ersten, zweiten und dritten Differenzen, ferner eine andere für den ersten und letzten Grad des Quadranten mit demselben Halbmesser von Sekunde zu Sekunde, nebst den ersten und zweiten Differenzen. Ausserdem fand sich noch unter seinen nachgelassenen Papieren eine Tafel der Sinus, Tangenten und Sekanten für denselben Halbmesser von Minute zu Minute, und der Anfang einer Tafel der Tangenten und Sekanten für denselben Halbmesser von 10″ zu 10″ mit den ersten und zweiten Differenzen. Um diese wahrhaft herkulischen Arbeiten zu vollenden, unterhielt Rheticus 12 Jahre hindurch immer einige Rechner und verwandte viele tausend Gulden darauf. Aber er sollte das Werk nicht fertig sehen; der Tod ereilte ihn, als seine Rechner die Tafel der Kosekanten und Kotangenten in Angriff genommen hatten. Seine Papiere kamen in die Hände von Valentin Otho, der vollständig in seine Arbeiten eingeweiht war und ihm das feierliche

[1]) Gerhardt.

[2]) Geboren 15. Februar 1514 zu Feldkirch in Vorarlberg, gestorben 4. Dezember 1576 zu Kaschau in Ungarn.

Versprechen gegeben hatte, sein Werk so bald als möglich zu vollenden und zu veröffentlichen. Der Kaiser, die Kurfürsten von Sachsen und von der Pfalz unterstützten Otho mit bedeutenden Geldsummen und endlich erschien das Werk im Jahr 1596. Zusammen 1468 Seiten; wahrlich ein riesiges Werk echt deutschen Fleisses und unverdrossener Ausdauer! Es enthält alles, was auf Trigonometrie und trigonometrische Tafeln Bezug hat, und zwar in einer Vollständigkeit und Ausdehnung, wie bisher noch nicht geleistet war.[1])

An die Arbeiten des Rheticus und Othos reihen sich die von Bartholomäus Pitiscus (geb. 24. Aug. 1561 zu Schlaune bei Grünberg in Schlesien, gest. als kurpfälzischer Oberhofprediger 2. Juli 1613 zu Heidelberg). Zuerst erschien von ihm ein Abriss der sphärischen Trigonometrie, welchen Pitiscus zu einem vollständigen Lehrbuch der Trigonometrie (dem ersten in seiner Art) erweiterte. Dasselbe erschien 1600. Das erste Buch handelt von den Arten und Eigenschaften der ebenen und sphärischen Dreiecke unter Heranziehung der zum Verständnis notwendigen Sätze aus der Planimetrie und Stereometrie. Im zweiten Buch werden die trigonometrischen Funktionen und die Berechnung derselben besprochen: Pitiscus erwähnt nur Sinus, Tangente, Sekante; die Bezeichnungen „Kosinus, Kotangente, Kosekante" gebraucht er nicht. Er fasst sie als Verhältnisse auf; jedoch bestimmt ihn die geometrische Konstruktion der Linien zur Annahme, dass es für Bogen, die grösser als ein Quadrant, keine Tangenten und Sekanten gebe. Demnächst behandelt Pitiscus in neun Aufgaben, aus dem Sinus eines Bogens, der kleiner ist als ein Quadrant, den Sinus des Komplementes zu finden, wie aus einem gegebenen Sinus und dem Sinus seines Komplementes der Sinus des doppelten Bogens, wie die Sehnen des dreifachen, fünffachen etc. Bogens gefunden werden, sodann wie aus einem gegebenen Sinus und dem Sinus des Komplementes der Sinus des halben Bogens, wie aus der Sehne eines Bogens die des dritten, fünften etc. Teils zu ermitteln ist, zuletzt wie aus dem Sinus und dem Komplement des Sinus der Sinus der Summe und der Differenz der Bogen und das Komplement des Sinus für die Summe und Differenz der Bogen erhalten wird. Alle diese Aufgaben werden geometrisch und algebraisch dargethan, und eine jede durch ausführliche Beispiele erläutert. Mit Hilfe dieser neun Aufgaben ermittelt Pitiscus alle Sinus. Alsdann zeigt er, wie die Tangenten und Sekanten aus den Sinus gefunden werden. Die Richtigkeit der berechneten Tafel kann entweder mit Hilfe der vorausgeschickten Lehrsätze oder durch die Differenzen geprüft werden. An die Stelle der Differenzen setzt er die Proportionalteile entweder für 1' oder 10". In dem dritten Buch folgt die ebene Trigonometrie und zwar zuerst das rechtwinklige Dreieck, alsdann das schiefwinklige. In derselben Ordnung enthält das vierte Buch die sphärische Trigonometrie. Im fünften Buch finden sich Abkürzungen und Abänderungen im trigonometrischen Rechnen. Nun folgt unter dem Titel: Canon Triangulorum etc. die trigonometrische Tafel. Die nun folgenden elf Bücher enthalten zur Anwendung der ebenen und sphärischen Trigonometrie Aufgaben, die Feldmessen, Höhenbestimmungen, Fortifikation, mathematische Geographie, Gnomonik und Astronomie betreffen. — Das Werk zeichnet sich durch Klarheit und Gründlichkeit aus. Dieselbe Sorgfalt widmete auch Pitiscus der Verbesserung der Tafel des Rheticus. — So gehörten Jahrhunderte dazu, die trigonometrischen Tafeln zu der Vollkommenheit zu bringen, die sie ohne Logarithmen haben konnten. Eigentlich hatte man sich, ob lange vor dem Ptolemäus, wissen wir nicht, aber vom Ptolemäus an, zwölf Jahrhunderte mit unvollkommenen Tafeln befriedigt. Erst in den letzterwähnten anderthalb Jahrhunderten erhielten die

[1]) Gerhardt.

Tafeln eine Genauigkeit und zugleich eine Bequemlichkeit zum Gebrauch, an deren keines Griechen und Araber gedacht hatten.

Durch das ganze 16. Jahrhundert geht ein Zug, die Trigonometrie und die trigonometrischen Tafeln auf den möglichsten Grad von Genauigkeit zu bringen, und wir haben gesehen, mit welch rühmlichem Erfolg namentlich deutsche Mathematiker auf diesem Gebiet gearbeitet haben. Aber je genauer die trigonometrischen Tafeln hergestellt wurden, um so umständlicher und zeitraubender war die Rechnung mit den vielziffrigen Zahlen. Da erschienen im Jahr 1614 die von Joh. Napier berechneten Logarithmen, welche sofort von allen Mathematikern, besonders von den Astronomen, mit dem grössten Beifall aufgenommen wurden. Man kann mit grösster Wahrscheinlichkeit annehmen, dass Lord John Napier, Baron von Merchiston (geb. 1550, gest. 1617) auf seine Erfindung durch die Bemerkung geführt wurde, dass, wenn man sich den Kreis in vier Quadranten geteilt vorstellt und vom Sinus von 90° ausgeht, durch eine fortdauernde Bewegung desselben längs dem horizontalen Halbmesser die Sinus durch den ganzen ersten Quadranten hervorgebracht werden, indem man den Sinus von 90° in geometrischer Progression abnehmen lässt, während er in arithmetischer auf dem horizontalen Halbmesser fortrückt. Er nannte nun die Linie, die vom Anfang der Bewegung an auf dem horizontalen Halbmesser bis zu dem jedesmaligen Sinus hin abgeschnitten wird, den Logarithmus des Sinus, d. h. die Rechnungszahl, womit an Stelle des Sinus die Rechnung ausgeführt werden kann. Demzufolge setzte Napier den Logarithmus des Sinus totus (d. h. des Sinus für den rechten Winkel), den er $= 10\,000\,000$ annahm, gleich 0 und liess für die abnehmenden Sinus die Logarithmen wachsen, so dass der Logarithmus des Sinus von 0° unendlich wurde. Mit ganz besonderem Eifer studierte Henry Briggs (geb. 1560, gest. Oxford 1630) die neue Erfindung und erkannte bald, dass die ganze Einrichtung der Logarithmen bequemer ausfiele, wenn sie in Verbindung mit dem Dezimalsystem gebracht wurden; auch sei es besser, dass die Logarithmen zugleich mit den Zahlen wachsen, wenn $\log 1 = 0$ und $\log 10 = 1$ gesetzt würde. Im Einverständnis mit Napier machte sich Briggs sofort an die Ausführung seiner Idee und bestimmte in weniger denn sieben Jahren 30000 Logarithmen bis auf vierzehn Dezimalstellen. Die von ihm gelassenen Lücken wurden durch Vlacq, Gellibrand und Günther ausgefüllt.

---

## Das 17. Jahrhundert.

„Die Bestrebungen des 17. Jahrhunderts richteten sich in der Geometrie hauptsächlich auf die Inhaltsberechnungen krummer Linien und Oberflächen. Die Methode, die schon der grosse Archimedes seinen genialen Untersuchungen zu Grunde legte, die des Unendlichkleinen, gewann immer mehr an Ausdehnung und erreichte zuletzt in der Infinitesimalrechnung ihre wissenschaftliche Krone.“ „Noch ehe das 16. Jahrhundert zu Ende ging, erhob sich am wissenschaftlichen Himmel Deutschlands ein Gestirn, dessen Glanz die schwarze Nacht, die unser Vaterland in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts bedeckte, nicht zu verdunkeln vermochte: Johann Kepler,[1]) ausgerüstet mit wunderbar reicher

[1]) Johann Kepler wurde geboren am 27. Dezember zu Magstadt, einem Dorfe nahe bei der ehemaligen Reichsstadt Weil in Württemberg, wo sein Vater ein Gastwirt war. Seine erste Erziehung wurde sehr vernachlässigt. Nach seines Vaters Tod bezog er die Klosterschule zu Maulbronn und später die Universität Tübingen. Die Armut war hier wie in seinem ganzen Leben seine stete Begleiterin. Im Jahr 1593 wurde er Professor der Mathematik zu Gratz, und hier fing er auch an, sich mit Astronomie zu beschäftigen. Im Jahr 1596 erschien sein erstes grösseres

Geisteskraft, mit einer fast dämonischen Erfindungsgabe, mit einer seltenen Ausdauer in der Arbeit, verband die kühnsten Gebilde der Phantasie mit dem tiefen geometrischen Blick des Mathematikers. In ihm lebte das Bewusstsein, dass der Charakter der Naturgesetze mathematisch ist, und die Geometrie war ihm der Schlüssel zu den Geheimnissen der Welt. Auf der Universität Tübingen durch Michael Mästlein in das kopernikanische System eingeweiht, fasste Kepler die Idee, dieses System mathematisch zu begründen; der Schöpfer aller Dinge konnte nur nach den ewigen Wahrheiten und nach der Harmonie, die sich in den geometrischen Gebilden ausdrücken, den Bau der Welt geordnet haben. Dies zu entdecken, wurde fortan die Aufgabe seines Lebens. Nach mehreren erfolglosen Versuchen kam ihm der Gedanke, den Grund der sechs Planetenbahnen um die Sonne in den fünf regulären Körpern der Geometrie zu suchen; von jeher hatten diese Körper in den Spekulationen der Pythagoräer, sowie bei den mystischen Philosophen des 15. und 16. Jahrhunderts eine bedeutende Rolle gespielt. Dieser kosmologische Traum fand den grössten Beifall der ersten Astronomen der damaligen Zeit und begründete Keplers wissenschaftlichen Ruf. Kein Wunder, dass Kepler die mathematische Theorie der regulären Figuren weiter verfolgte. Sein eminentes mathematisches Talent, besonders auf dem Gebiet der Geometrie, tritt hierbei aufs glänzendste zu Tage. Ausser den regulären Polygonen im gewöhnlichen Sinn zieht er die sogenannten Sternpolygone, ausser den fünf regulären Körpern auch die dreizehn halbregulären Körper Archimedes' in Betracht. Zugleich sann Kepler auf die Bildung neuer Körper, indem er Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel um Durchmesser, Sehnen, Tangenten und andere Linien rotieren liess. So stieg die Anzahl der Körper, zugleich mit den bisher betrachteten, auf 92 und er richtete nun an die Geometer die Aufforderung, der Inhaltsbestimmung derselben ihre Aufmerksamkeit zu widmen.“ [1])

Die alten Geometer bedienten sich zu gewissen Zwecken der Exhaustionsmethode, z. B. Euklid, um zu beweisen, dass der Flächeninhalt eines Kreises gleich ist einem Dreieck, dessen Basis der Umfang und Höhe der Radius ist; noch mehr Archimedes, z. B. bei der Darstellung der Fläche der Parabel und der Berechnung der Konoide. Der Grundgedanke hierbei war, dass, wenn z. B. die Seiten eines ordentlichen Vielecks im Kreise immerfort halbiert werden, neue

Werk: „Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens mysterium cosmographicum“, und diese Schrift trägt schon ganz das Gepräge seines Geistes, der sich später so eigentümlich entwickelte. Er nimmt hier das kopernikanische System in seinen Schutz, wobei er viel Scharfsinn, aber noch mehr Phantasie vorherrschen lässt. Drei Jahre später kam er nach Prag, um sich daselbst mit Tycho, mit dem er schon früher in Briefwechsel gestanden hatte, zu astronomischen Zwecken zu vereinigen. Durch Tychos Protektion erhielt er hier die Stelle eines kaiserlichen Mathematikers, allein da ihm in den dem dreissigjährigen Krieg vorausgehenden Bedrängnissen seine Besoldung nicht ausbezahlt wurde, ging er, nach einem elfjährigen dürftigen Aufenthalt in Prag, im Jahr 1610 nach Linz als Professor der Mathematik, wo er neue fünfzehn Jahre in nicht weniger drückenden Verhältnissen zubrachte. Im Jahr 1625 trat er in die Dienste eines Privatmanns zu Ulm, wo er sich mit Zeichnungen von Landkarten u. dergl. beschäftigte, und weil ihm auch hier die eingegangenen Bedingnisse nicht erfüllt wurden, so ging er 1628 in Wallensteins Dienste, der ihm eine Professorsstelle an der Universität zu Rostock, über die er das Patronatrecht hatte, verlieh. Da ihm aber auch hier seine Besoldung nicht ausgezahlt wurde, reiste er zu dem Reichstag nach Regensburg, um hier die Auszahlung seiner immer noch rückständigen Pension zu erbetteln. Bald nach seiner Ankunft in Regensburg verfiel er, infolge der Anstrengungen seiner Reise und des ihn überall begleitenden Kummers, in eine Krankheit und starb am 15. Nov. 1631 in seinem sechzigsten Lebensjahr. Der Fürst Primas von Dalberg liess ihm im Jahr 1808 in Regensburg ein Monument von Backsteinen durch Subskription setzen. Aber sein wahres Denkmal ist mit Flammenschrift an dem gestirnten Himmel eingetragen, wo es seine dankbaren Landsleute, wenn sie diese Schrift verstehen, lesen können, und wo sie andere auch dann noch lesen werden, wenn von ihnen selbst wahrscheinlich längst schon keine Rede sein wird. (Littrow.)

[1]) Gerhardt.

Vielecke von doppelter Seitenzahl entstehen und die Umfänge derselben sich immer mehr dem Umfang des einbeschriebenen Kreises nähern, ebenso die Vielecke um den Kreis; die einbeschriebenen Figuren blieben stets kleiner und die umbeschriebenen stets grösser als der Kreis. Man konnte nun die Teilung in Gedanken soweit fortsetzen, dass die Unterschiede kleiner wurden als jede angebbare Grösse, also in der That unendlich klein, d. h. verschwindend. Eine solche Vorstellung, welche den Indern geläufig war, wagten aber die Griechen nicht, sie umgingen sie auf künstliche Weise, und dadurch wurden ihre Beweise zum Teil höchst schwerfällig. Archimedes fand die Fläche der Parabel dadurch, dass er zeigte, dass sie aus einer Reihe Flächen zusammengesetzt sei, von welchen jede folgende $^1/_4$ der vorhergehenden ist, und da diese Reihe kein Ende hat, so werden die Glieder immer kleiner und zuletzt unendlich klein; er vermied dieses auszusprechen, die Sache wurde aber dadurch nicht verändert. Man begreift aber leicht, wie die Griechen bei ihrer Richtung einer Vorstellung ausweichen mussten, bei welcher ihnen die Sache gleichsam unter den Händen verschwand und sie nichts Darstellbares mehr hatten, woran sie sich halten konnten. Kepler brach nun zuerst dieses Verhältnis und hat dadurch der Mathematik einen grossen Dienst geleistet, denn bei allen derartigen Dingen kommt es nur darauf an, dass jemand den ersten Schritt thut. Die Einführung der Idee des Unendlichen war so notwendig, dass ohne sie gar keine Fortschritte von Bedeutung möglich gewesen wären. Kepler betrachtete den Kreis als eine Summe kleiner Dreiecke, deren Spitzen im Mittelpunkt beisammenliegen, die Grundlinien aber im Umfang des Kreises haben; nimmt man nun diese immer kleiner an, also die Anzahl der Dreiecke immer grösser, so ist die Grenze dieser Vorstellung notwendig der Kreis. Ebenso betrachtete er die Kugel als die Summe einer unendlich grossen Anzahl kleiner Pyramiden, mit ihren Spitzen im Mittelpunkt beisammenliegend, mit ihrer Grundfläche aber in der Oberfläche der Kugel, den Cylinder als eine ebensolche Anhäufung von Prismen u. s. w. Aehnliche Vorstellungen hatten auch die Inder angenommen. Archimedes hatte die Körper betrachtet, welche durch Umdrehung eines Kegelschnitts um die Axe entstehen, Kepler fasste die Sache allgemeiner und liess Körper hervorgehen durch Umdrehung dieser Kurven oder auch von Teilen derselben um beliebige Linien als Achsen. Er vermochte freilich nicht diesen Stoff zu bewältigen und hinterliess ihn künftigen Forschern, doch wurden einige einfachere Fälle auch von ihm gelöst. Eine unmittelbare Frucht seiner Idee des Unendlichen war die Bemerkung, dass, wenn $PM$ die grösste Ordinate einer Kurve $AB$ ist, die Zu- oder Abnahme dieser Ordinate bei unendlich kleiner Veränderung ihres Ortes $= 0$ sein muss, eine Bemerkung, welche die Grundlage der so wichtigen Lehre vom Grössten und Kleinsten wurde. Diese Arbeit Keplers war 1615 herausgekommen.

Figur 82.



Systematisch ging der Italiener Cavaleri (geb. 1598 zu Mailand, gest. 1647 zu Bologna) zu Werke. Die Methode, deren sich derselbe bediente zur Inhaltsberechnung von Flächen und Körpern, ist der Infinitesimalrechnung um einen grossen Schritt näher gerückt. Cavaleri betrachtet, wie aus seiner 1635 erschienenen Geometrie ersichtlich ist, die Fläche als eine stetige Aufeinanderfolge von Linien, die Körper als eine unendliche Summe von Flächen, denen er eine gewisse, doch unteilbar angenommene Dicke beilegt. Aus dem Verhältnis der stetigen Zu- oder Abnahme der Grösse dieser Linien oder Flächen schliesst er

dann auf die Grösse der betreffenden Gebilde. Man denke sich über der Basis eines Dreiecks ein Rechteck von gleicher Höhe gezeichnet und in beiden Figuren eine Menge Linien parallel zur Grundlinie und in gleichen Abständen von einander gezogen, so wird die Summe der Linien im Dreieck die Hälfte sein von der Summe der Linien im Rechteck, und deshalb, schloss Cavaleri weiter, wird auch die Fläche des Dreiecks die Hälfte sein von der Fläche des Vierecks. Auf diese Weise gelang es ihm nun, eine Menge neuer Berechnungen von Raumgrössen aufzufinden. So findet er, dass die Summe der Quadrate aller Linien, durch deren Aufeinanderfolge das Dreieck gebildet wird, gleich ist $^1/_3$ der Summe der Quadrate aller Linien, die das Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe zusammensetzen. Daraus schliesst er, dass Pyramide und Kegel $^1/_3$ des Prismas und Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe sind, weil die Polygone und Kreise, die jene zusammensetzen, von der Grundfläche zur Spitze im gleichen Verhältnis abnehmen, wie die Quadrate der Dreieckslinien. In den sechs ersten Büchern seines Werkes wandte Cavaleri seine neue Methode auf die Quadratur der Kegelschnitte und auf die Kubierung der aus ihrer Umwälzung erzeugten Körper an.

Zu derselben Zeit suchte der Mathematiker Guldin (geb. 1577 zu St. Gallen, gest. 1643 zu Wien) auf anderem Wege zur Inhaltsbestimmung der Körper zu gelangen. Der Satz, auf den er seine Methode basierte, ist berühmt unter dem Namen der Guldinschen Regel, findet sich aber schon bei Pappos. Er heisst: Rotiert irgend eine Figur um eine in ihrer Ebene befindliche Achse, so ist der Inhalt des entstehenden Rotationskörpers gleich dem Produkt aus der Fläche der Figur in den Weg ihres Schwerpunkts.

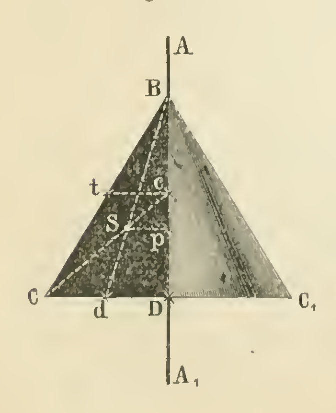
Bezeichnet man den Inhalt der Erzeugungsfigur eines Rotationskörpers mit $F$, den Abstand des Schwerpunkts derselben von der Drehachse mit $s$, also den Weg, welchen der Schwerpunkt bei einer ganzen Umdrehung jener Erzeugungsfigur zurücklegt, mit $2s\pi$ und das Volumen mit $V$, so besteht hiernach die Formel:

$$V = 2s\pi \cdot F.$$

Ist z. B. (siehe Figur 83) $BCD$ das gegebene, rechtwinklige Dreieck, welches um die Kathete $BD = b$ rotiert, so erzeugt dasselbe bei einer ganzen Umdrehung einen geraden Kreiskegel, dessen Höhe $BD = b$ und dessen Grundflächenradius $CD = a$ ist. Bekanntlich ist aber das Volumen eines Kegels

$$V = \frac{r^2 \pi h}{3}$$

Figur 83.




oder die vorerwähnten Werte eingesetzt

$$V = \frac{a^2 \pi b}{3}.$$

Zerlegt man diese Gleichung in

$$V = 2 \cdot \frac{a}{3} \pi \cdot \frac{ab}{2}$$

und setzt für

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{BD}}{2} = F$$

(als Flächeninhalt des Dreiecks $BCD$) und für

$$\frac{a}{3} = \frac{\overline{CD}}{3} = \overline{Sp} = s$$

(die Entfernung $s$ des Schwerpunkts $S$ des Dreiecks $BCD$ von der Drehachse $AA_1$)[1]), so geht jene Gleichung über in $V = 2s\pi \cdot F$. Berücksichtigt man nun, dass $2s\pi$ die Kreislinie ist, welche der Schwerpunkt $S$ des Dreiecks $BCD$, dessen Inhalt $F$ ist, bei der Rotation beschreibt, so kann man sagen: „Das Volumen des durch Rotation des Dreiecks $BCD$ in Figur 83 erzeugten Rotationskörpers ist gleich der Anzahl Kubikeinheiten, welche man erhält, wenn man den Weg $2\pi s$, welchen der Schwerpunkt $S$ jenes Dreiecks bei der Rotation zurücklegt, mit dem Flächeninhalt $F$ jenes Dreiecks multipliziert."

Die Berechnung der Flächeninhalte von Rotationsflächen, bezw. die Berechnung der Inhalte der krummen Begrenzungsflächen von Rotationskörpern kann nach der erweiterten Guldinschen Regel ausgeführt werden. Diese Regel lautet:

„Der Flächeninhalt einer Rotationsfläche ist gleich der Anzahl von Flächeneinheiten, welche man erhält, wenn man die Länge der erzeugenden Linie mit dem Weg multipliziert, welchen der Schwerpunkt derselben bei der Rotation zurücklegt."

Bezeichnet man die Länge der eine Rotationsfläche erzeugenden Linie mit $L$, den Abstand des Schwerpunkts derselben von der Drehachse mit $s$, also den Weg, welchen der Schwerpunkt bei einer ganzen Umdrehung jener erzeugenden Linie zurücklegt, mit $2s\pi$ und den Inhalt jener Rotationsfläche mit $F$, so ist $F = 2s\pi \cdot L$.

Bekanntlich ist der Mantel eines Kegelsumfangs mal halbe Seitenlänge oder

$$M = U \cdot \frac{1}{2} s = 2r\pi \cdot \frac{1}{2} s = r\pi s;$$

setzt man in dieser Gleichung mit Bezug auf Figur 83:

$$r = \overline{CD} = a \text{ und } s = \overline{BC} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

so ist

$$M = a\pi\sqrt{a^2 + b^2},$$

es ist aber

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{BC} = L;$$

ist ferner $t$ der Mittelpunkt, resp. der Schwerpunkt der Strecke $\overline{BC}$ und ist $tc$ parallel $CD$, also $= \frac{1}{2}\overline{CD}$ und setzt man hiernach $a = \overline{CD} = 2s$, so ist, wenn ausserdem $M = F$ gesetzt wird, der vorstehende Wert für $M$ auch:

$$F = 2s \cdot \pi \cdot L.$$

„Guldin veröffentlichte seine Erfindung in dem Werk: „de centro gravitatis" oder „centro-baryca."

Diese Methode ist exakter als die Keplers und Cavaleris, aber sie birgt den Uebelstand in sich, dass oft die vorausgesetzte Bestimmung des Schwerpunkts einer Figur schwerer zu finden ist, als das Volumen des erzeugten Körpers.

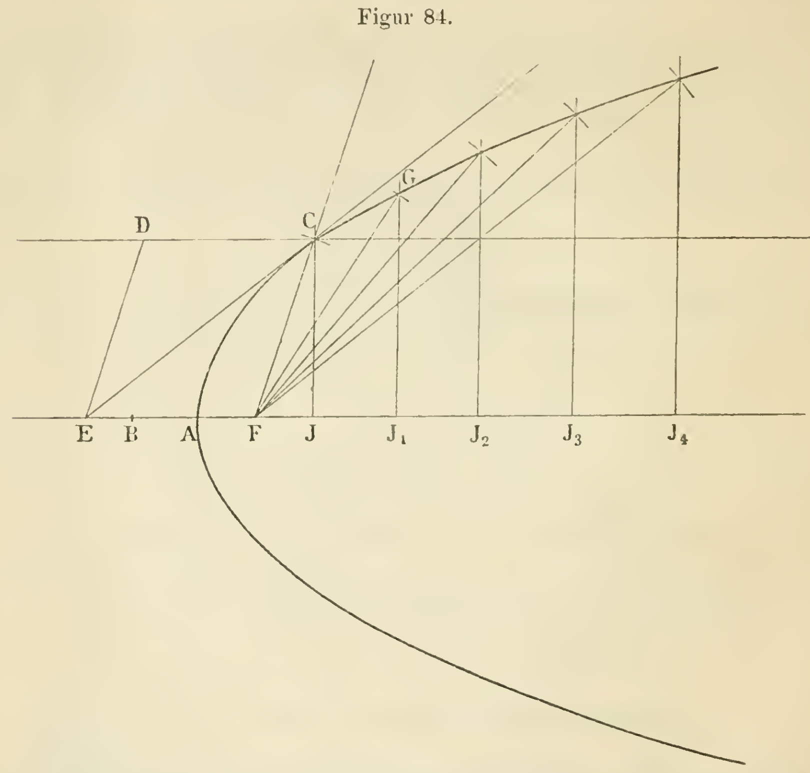
---

[1]) Verbindet man in Figur 83 die Mitten $c$ und $d$ der Dreiecksseiten $BD$ und $CD$ mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks, so ist der Schnittpunkt $S$ dieser beiden Schwerlinien der Schwerpunkt des Dreiecks, der die Schwerlinie $Bd$ und $Cc$ im Verhältnis von $1:2$ teilt, d. h. $Sc = \frac{1}{3} Cc$ und $Sd = \frac{1}{3} Bd$ und $Sp = s = \frac{1}{3} a$.

Ungefähr zur selben Zeit wie Cavaleri und unabhängig von diesem beschäftigte sich in Frankreich Roberval[1]) mit diesem Gegenstand. Er dachte sich die Flächen als eine Anhäufung unendlich schmaler Rechtecke und die Körper ebenso aus unendlich kleinen Prismen zusammengesetzt. — Archimedes hatte bereits seine Spirallinie als durch eine doppelte Bewegung erzeugt angesehen; diesen Gedanken dehnte nun Roberval auf alle Kurven aus. Eine ebene Kurve kann auf diese Weise betrachtet werden als beschrieben von einem Punkt, auf welchen zwei Kräfte wirken. Man denke sich einen unendlich kleinen Teil einer Kurve, so wird dieser als eine gerade Linie angesehen werden können und zugleich als die Mittelkraft zweier Seitenkräfte, welche der Natur der Kurve entsprechen. Sind nun die Seitenkräfte gegeben, so kann man daraus die Mittelkraft finden, also auch die Richtung der Kurve an jener Stelle, d. h. die Tangente. Roberval behandelt in seiner Schrift die Tangentenlegung an 13 verschiedenen Kurven; z. B. diejenige an die Parabel:

Es seien in Figur 84 der Scheitel $A$ und der Brennpunkt $F$ der Parabel gegeben, ebenso $AB = AF$ gemacht. Man ziehe in beliebigen Punkten $J$, $J_1$,

Figur 84.



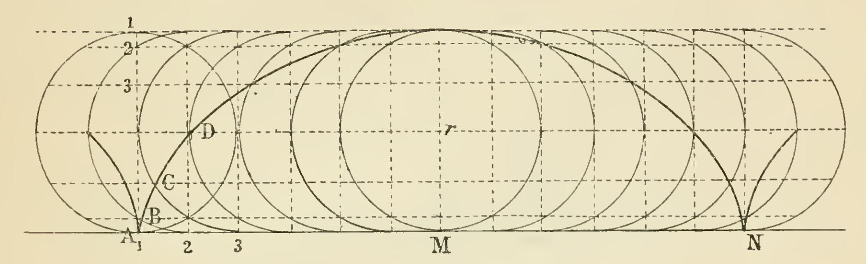

$J_2$ und $J_3$ der Achse Senkrechte zu derselben und beschreibe vom Brennpunkt $F$ aus mit den Radien $BJ$, $BJ_1$, $BJ_2$ etc. Kreise, so werden die jeweiligen

[1]) Roberval, geboren 1602 von armen Eltern in Beauvais, that in seiner Jugend Soldatendienste und ging 1629 nach Paris, wo er sich bald mit Mersenne und andern Mathematikern verband. 1631 wurde er Professor der Philosophie. Er hatte eine eigene Methode erfunden, durch die er die schwersten Probleme auflöste, die er aber sorgfältig verborgen hielt, bis Cavaleri seine Methode des indivisibles bekannt gemacht und ihm dadurch den Ruhm, die Differentialrechnung entdeckt zu haben, benahm. Mit Descartes und Torricelli lebte er lange in litterarischen Fehden. Seine Arbeiten über den Mittelpunkt des Stosses wurden von seinen Zeitgenossen sehr geachtet. Er starb 1675.

Durchschnittspunkte dieser Kreise mit den Senkrechten Punkte der Parabel sein. Die Bewegung des Punktes $C$, der die Parabel beschreibt, ist zusammengesetzt aus zwei Bewegungen; die eine hat die Richtung der Geraden (des Radii vectoris) $\overline{FC}$, die andere diejenige der zur Achse Parallelen $DC$. Beide Bewegungen aber haben gleiche Geschwindigkeit, denn $FC$ ist für jeden Punkt gleich $\overline{BJ}$ oder $\overline{DC}$; daher ist, wenn $FE = CD$, die Diagonale $CE$ des Parallelogramms $CDEF$ oder die Halbierungslinie des Winkels $DCF$ die Tangente der Parabel im Punkt $C$.

Fermat[1]) und Descartes definierten die Tangenten als Sekanten, deren Durchschnittspunkte mit der Kurve in einen zusammenfallen, und Barrow betrachtete die Tangente einer Kurve als die Verlängerung der Seite eines Polygons von unendlich grosser Seitenzahl, als welches er die Kurve auffasste. Roberval wandte seine Methode, nachdem schon Torricelli von Cavaleris Methode bei der Quadratur der Cykloide oder Radlinie Gebrauch gemacht hatte, schon damals auf dieselbe krumme Linie an. Schon 1615 war diese krumme Linie von dem Pater Mersenne einer besondern Aufmerksamkeit gewürdigt worden. Derselbe betrachtete nämlich an einem fortrollenden Wagenrad die Bewegung eines Radnagels in der Luft, und da sah er, dass dieser Nagel dieselbe krumme Linie in der Luft beschrieb, welche Cykloide genannt wurde. Man erhält dieselbe, wenn die Grundlinie $AN$ und der Erzeugungskreis um $r$ gegeben ist,


Figur 85.




indem man den Umfang des letzteren in 12—24 gleiche Teile teilt und einen solchen Teil ebenso oft mal auf der Grundlinie abträgt. Dann zieht man in den Teilpunkten 1, 2, 3 des Kreises Parallelen und in den Teilpunkten 1, 2, 3 ··· der Grundlinie Senkrechte zu dieser, und aus den Durchschnittspunkten beschreibt man Kreisbögen mit dem Radius $rM$, welche die Parallelen in $B$, $C$, $D$ etc. durchschneiden, so sind dies Punkte der verlangten Cykloide, durch deren Verbindung man eine stetige Linie erhält. Dem Mersenne selbst gelang es nicht, die Natur dieser krummen Linie zu entdecken; deswegen teilte er dem Roberval 1634 die dabei getroffenen Schwierigkeiten mit. Dieser scharfsinnige Mathematiker verglich den Inhalt der Cykloide mit dem Inhalt des erzeugenden Kreises und hat gefunden, dass jener das Dreifache des letzteren ist. Auch bestimmte

1) Fermat, Peter, geb. 1595 zu Toulouse, wo er auch im Januar 1665 als Parlamentsrat starb. Einer der grössten Mathematiker Frankreichs, der auch mit beinahe allen berühmten Mathematikern seiner Zeit, mit Descartes, Pascal, Roberval, Huyghens, Wallis, Leibnitz u. a. durch eine ausgebreitete Korrespondenz in der innigsten Verbindung lebte. Er ist als einer der ersten Begründer der Infinitesimalrechnung zu betrachten. Seine Lieblingsbeschäftigung scheint die mit der Natur der Zahlen, mit der unbestimmten Analysis und mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewesen zu sein. Seine vielen Amtsgeschäfte scheinen ihn gehindert zu haben, eigentliche gelehrte Werke zu verfassen, daher er sich meistens nur mit kurzen Anzeigen seiner Entdeckungen begnügte.

er die körperlichen Räume, welche von der krummen Linie durch ihre Umwälzung um die Axe erzeugt werden, und endlich gelang es ihm, die Tangente der Cykloide zu konstruieren. Fermat und Descartes lösten gleichfalls das Problem der Tangente dieser Kurve, jeder nach eigener Methode; dadurch entspann sich ein heftiger Streit zwischen den drei Mathematikern, welcher erst durch Pascals ausgezeichnete und erschöpfende Diskussion der Cykloide niedergeschlagen wurde. Er begnügte sich nicht bloss mit der Quadratur der vollständigen Kurve, sondern berechnete den Flächeninhalt und den Schwerpunkt beliebiger Segmente, den Kubikinhalt und Schwerpunkt der durch Rotation solcher Segmente um die Achse oder die Ordinate gebildeten Körper etc. Alle diese Probleme hatte Pascal, bevor er sie veröffentlichte, als Preisaufgaben ausgeschrieben; eine beträchtliche Zahl derselben wurde von verschiedenen Mathematikern, wie dem Pater Lalouère und dem berühmten Engländer Wallis gelöst, haben aber nicht die Billigung des dadurch in seinem Ehrgeiz gekränkten Pascal gefunden. Derselbe glaubte nämlich, da schon Roberval und Fermat an diesen schwierigen Problemen scheiterten, es würden keine Lösungen eingehen. Er wies also die Arbeiten der oben Genannten zurück und veröffentlichte seine Lösungen unter fremdem Namen 1659. Im gleichen Jahr erschien dann auch die Abhandlung des englischen Mathematikers über die Cykloide und ein Jahr später diejenige des Paters Lalouère.

Auch Galilei kann als Erfinder dieser Kurve angesehen werden, denn aus einem Brief desselben an Torricelli (1639) geht hervor, dass sich Galilei schon 40 Jahre lang mit der Cykloide beschäftigt hatte. Er empfahl sie wegen ihrer gefälligen Gestalt für Brückenbögen. Die Bestimmung ihres Inhalts aber gelang ihm nicht; denselben fand zuerst Torricelli, des Galilei Schüler. Letzterer hatte sich überhaupt 1644 viel mit der Cykloide beschäftigt und manche bei derselben vorkommende Probleme aufgelöst, wodurch er mit dem eitlen und zänkischen Roberval, der sich alle Erfindungen anmassen wollte, so in Verdruss geriet, dass er darüber 1647 sein Leben einbüsste.

Dem schon genannten Wallis (gest. 1703) verdankt die Geometrie noch einige andere Erweiterungen. Er wandte die Lehre von der Summierung unendlicher Reihen, deren Glieder eine stetige Folge bilden, auf die Geometrie ausführlicher an, als es seit Cavaleris Zeit von andern Geometern geschehen war. Die glückliche Bemerkung, Nenner der Brüche als Potenzen zu betrachten, deren Exponenten negativ sind, setzte ihn in den Stand, alle Figuren und Körper zu messen, deren Elemente sich umgekehrt wie jede Potenz der Abscisse verhalten.

Von Torricelli ist noch zu bemerken, dass er die Lehre des Archimedes von der Kugel vervollständigte, vornehmlich durch die Bestimmung des Inhalts der Körper, welche durch Umdrehung regulärer Vielecke erzeugt werden. Er gab 20 verschiedene Arten an, die Parabel zu quadrieren, teils geometrische, teils mechanische, teils nach der Methode des Unteilbaren. Die Quadratur der Cykloide hatte er auf dreierlei Art herausgebracht.

Christoph Wren (1632—1723), ein berühmter englischer Architekt, fand zuerst die Vergleichung der Bögen der Cykloide mit einer geraden Linie; überhaupt war jene Kurve die erste gegebene krumme Linie, welche rektifiziert wurde.

Bei mehreren mechanischen Anwendungen, z. B. bei den Huyghensschen Pendeluhren zu isochronischen Schwingungen, zu der Gestalt der Zähne mancher Räder, zu der Gestalt der Däumlinge in Stampf-, Hammer- und ähnlichen Hebewerken etc. erhielt die Cykloide eine grosse Wichtigkeit.

Der niederländische Jesuit Gregorius a. St. Vincentio (1584—1667) ist als einer der vortrefflichsten Mathematiker zu erwähnen, die auf dem Gebiet der Flächen- und Inhaltsberechnung krummliniger Gebilde nach der Methode der Alten vorgingen. Sein 1644 erschienenes Werk, worin er ohne Erfolg die

Quadratur des Kreises suchte, ist sehr reichhaltig an genauen und tiefsinnigen Untersuchungen, z. B. über Ausmessungen der hufförmigen Schnitte verschiedener durch Umwälzung der Kegelschnitte erzeugten Körper. Auch fand er, dass die Flächenräume zwischen einer Hyperbel, der einen Asymptote und den mit der andern parallelen Ordinaten gleichförmig wachsen, wenn die zugehörigen Abscissen in geometrischer Progression genommen werden.

Pascal,[1]) ein Zeitgenosse von Fermat, war diesem an Genialität überlegen. Seine Auffassung und Behandlungsweise der Kegelschnitte würde allein seinen Namen unsterblich gemacht haben; sie bildet den Grundstein der neueren Geometrie, als deren Erfinder wir daher Pascal mit Recht betrachten. Seine Methode nimmt die Prinzipien der Perspektive zu Hilfe, indem die Kegelschnitte als Projektionen des Kreises aufgefasst und so aus den Eigenschaften des letzteren diejenigen der ersteren abgeleitet werden. Leider ist dieses Werk verloren gegangen. Durch Leibnitz erfahren wir die Einteilung desselben. Es bestand aus sechs Büchern, von denen das zweite die Hauptsätze der neueren Geometrie enthielt, den Satz des anharmonischen Verhältnisses, den schon Pappos kannte, und denjenigen von dem mystischen Sechseck, von Pascal erfunden und heute noch nach ihm benannt, dass nämlich die Durchschnittspunkte zweier gegenüberliegenden Seiten eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks in einer Geraden liegen oder wie er in den Lehrbüchern der ebenen Geometrie lautet: Die drei Durchschnittspunkte je zweier Gegenseiten eines Sehnensechsecks liegen auf einer Geraden.

Voraussetzung: $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$, $FA$ Sehnen eines Kreises.

$AB$ und $DE$ schneiden sich in $X$.
$BC$ „ $EF$ „ „ „ $Y$.
$CD$ „ $FA$ „ „ „ $Z$.

Behauptung: $X$, $Y$, $Z$ liegen auf einer Geraden.

Beweis: Man verlängere drei getrennt liegende Seiten, $BC$, $DE$, $FA$, bis sie sich in $MNQ$ schneiden. Kann man für das Dreieck $MNQ$ nachweisen, dass

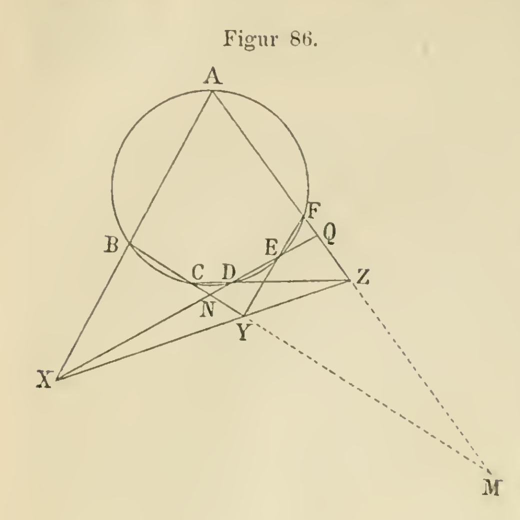
$$MY \cdot NX \cdot QZ = NY \cdot QX \cdot MZ,$$

so folgt aus der Umkehrung des Menelaos (liegen auf zwei Seiten eines Dreiecks und der Verlängerung der dritten, oder auf den Verlängerungen der drei Seiten drei Punkte so, dass die beiden Produkte aus je drei getrennt liegenden Seiten-

[1]) Blasius Pascal, einer der grössten Geometer und ausgezeichnetsten Schriftsteller Frankreichs, geb. 19. Juni 1623 zu Clermont in Auvergne. Sein Vater, ein hochgebildeter Mann, übernahm selbst die erste Erziehung seines einzigen Sohnes, mit dem er 1631 nach Paris zog, wo er bald in der engsten Verbindung mit den vorzüglichsten Geistern dieser Hauptstadt lebte. Seine erste Schrift über die Natur des Schalles wurde durch die Bemerkung veranlasst, dass eine Schale von Porzellan, mit einem Hammer geschlagen, ihren Klang sogleich verliert, sobald sie mit dem Finger berührt wird. Pascal zählte damals kaum 12 Jahre. Da sein Vater ihn mehr den alten Sprachen und den schönen Wissenschaften zuwenden wollte, so musste er die Mathematik, zu der er früh schon grosse Neigung zeigte, heimlich und ohne viel Bücherhilfe erlernen. In seinem 16. Jahr soll er bereits eine sehr treffliche Abhandlung über Kegelschnitte geschrieben haben, die den ungeteilten Beifall des Descartes erhielt. Aber durch seine anhaltenden Studien hatte er schon im 18. Jahr seine Gesundheit zerstört. Um dieselbe Zeit erfand er mehrere, damals grosses Aufsehen erregende Maschinen. In sein 23. Jahr fielen seine Beobachtungen der Berghöhen durch das Barometer. 1653 beschäftigte er sich mit der Natur der Zahlen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und löste oft schwere Probleme, an denen andere Monate gearbeitet hatten, in wenigen Minuten auf, obschon damals sein Körper bereits sehr leidend war. Dieses Siechtum veranlasste ihn zu einem strengen, enthaltsamen Leben und endlich zur völligen Zurückgezogenheit. Seit 1658 lag er an einer Todeskrankheit darnieder, bis er am 29. August 1662 im 39. Jahr seines Alters starb.

abschnitten gleich sind, so geht durch die drei Punkte dieselbe Gerade) die Behauptung. Zu diesem Zweck betrachte man der Reihe nach die Linien $XBA$, $YEF$ und $ZDC$ als schneidende Gerade des Dreiecks $MNQ$. Dann erhält man aus dem Satz des Menelaos (s. Seite 78):

Figur 86.




$$MB \cdot NX \cdot QA = NB \cdot QX \cdot MA$$
$$MY \cdot NE \cdot QF = NY \cdot QE \cdot MF$$
$$MC \cdot ND \cdot QZ = NC \cdot QD \cdot MZ.$$

Multipliziert man links und rechts und hebt folgende nach dem Sekantensatz gleiche Rechtecke auf beiden Seiten fort:

$$MB \cdot MC = MA \cdot MF$$
$$ND \cdot NE = NB \cdot NC$$
$$QF \cdot QA = QE \cdot QD,$$

so folgt die gesuchte Gleichung:

$$MY \cdot NX \cdot QZ = NY \cdot QX \cdot MZ$$

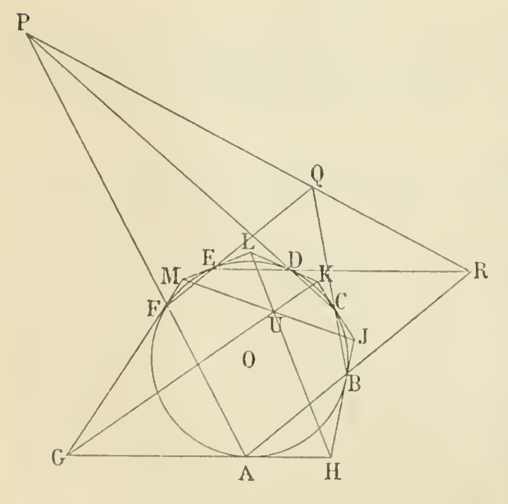
und somit die Behauptung.

Sind zwei Seiten des Sechsecks, welche sich schneiden sollten, parallel, z. B. $CD$ und $FA$, so wird auch $XY$ diesen Seiten parallel; der Durchschnittspunkt $Z$ rückt also in diesem Fall auf $XY$ in unendliche Entfernung.

Eine polare Uebertragung des Pascalschen Satzes ist der Brianchonsche Satz (in Brianchons Memoire sur les lignes du deuxième ordre, Paris 1817):

In jedem Tangentensechseck schneiden sich die drei Hauptdiagonalen in einem Punkt.

Figur 87.




Voraussetzung:
$GHJKLM$ ein Tangentensechseck.

Behauptung:
$GK$, $HL$, $JM$ schneiden sich in einem Punkt $U$.

Beweis: Man ziehe die Sehnen zwischen den aufeinanderfolgenden Berührungspunkten $ABCDEF$. Dann sind $AF$ und $CD$ die Polaren von $G$ und $K$, daher $GK$ die Polare des Durchschnittspunkts $P$ von $AF$ und $CD$. Ebenso sind $AB$ und $DE$ die Polaren von $H$ und $L$, daher $HL$ die Polare des Durchschnittspunkts $R$. Ebenso sind endlich $BC$ und $EF$ die Polaren von $J$ und $M$, daher $JM$ die Polare des Durchschnittspunkts $Q$. Da nun nach dem Pascalschen Satz die Punkte $PQR$ als Durchschnittspunkte der Gegenseiten des Sehnensechsecks $ABCDEF$ in einer Geraden liegen, so schneiden sich ihre Polaren, d. h. die Diagonalen $GK$, $HL$, $JM$ in einem Punkt.

Die Seiten des Pascalschen Sechsecks sind die Polaren der Ecken des Brianchonschen. Da nun die Durchschnittspunkte der Gegenseiten des Pascalschen Sechsecks auf einer Geraden liegen, so müssen sich die Verbindungslinien der Gegenecken des Brianchonschen in einem Punkt schneiden.

In seiner Abhandlung über Kegelschnitte, die Pascal schon in seinem 16. Lebensjahr herausgab, leitete er aus einem einzigen Satz 400 Zusätze ab.

Zur nämlichen Zeit mit Pascal lebte noch der Mathematiker Desargues, welcher, gleich seinem Schüler Pascal, die Prinzipien der Perspektive auf die Kegelschnitte anwandte, wodurch er vom Besondern auf das Allgemeine, von den Eigenschaften des Kreises auf die übrigen Kegelschnitte schliessen konnte. Da alle diese Kurven an demselben Kegel mit kreisförmiger Basis erzeugt werden können, so wird das Auge an der Spitze des Kegels, z. B. einen elliptischen Schnitt, nur als Kreis sehen, weil alle Punkte der Ellipse mit den entsprechenden Punkten des Kreises in derselben Gesichtslinie liegen; oder wenn man den Schatten einer Ellipse auf einer festen Wand auffängt, so wird man demselben gegen die Lichtstrahlen eine solche Lage geben können, dass der Schatten ein Kreis wird; der Kreis als Basis bildet alsdann mit dem Lichtpunkt als Spitze einen Kegel, in welchem die Ellipse einen schiefen Schnitt bildet. Der Kreis erscheint hier als eine Projektion der Ellipse, und da die Strahlen von einem Punkt ausgehend gedacht werden, in perspektivischer Anschauung. Aehnlich ist das Verhältnis für die andern Kegelschnitte, und die Anwendung der Perspektive war es, und die Betrachtung der Schnitte am Kegel selbst, welche die Forschungen beider Geometer so fruchtbar machten. Während die Alten jeden Kegelschnitt besonders betrachteten, und wenn sie bei dem einen eine Eigenschaft gefunden hatten, ebenso mühsam sie auch bei den andern suchen mussten, gelang es der allgemeinen Betrachtungsweise, wo alle Kegelschnitte als Unterarten einer einzigen Kurve erschienen, die gleiche Eigenschaft auf alle auszudehnen. Einer der Verehrer Desargues behauptete, dass ein einziger Satz desselben 60 Sätze der vier ersten Bücher des Apollonios in sich schloss.

Mydorge (1585—1647) hat ebenfalls als einer der ersten an der Vereinfachung der griechischen höheren Geometrie gearbeitet. Er schrieb eine Abhandlung über die Kegelschnitte, welche 1631 und vermehrt 1641 erschien; sie enthält unter anderem auch den Satz, dass, wenn man von einem Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts Radien nach der Kurve zieht und sie nach einem gegebenen Verhältnis verlängert, die Endpunkte auf einem neuen Kegelschnitt liegen, welcher dem ersten ähnlich ist. Diesen Satz hat seinem Wesen nach schon Apollonios in seinem sechsten Buch; er ist einer von den Sätzen, welchen, beschränkt auf den Kreis, Ben Haithem als neu und von ihm herrührend ausgab.

Einen Hauptschwung erhielt die Geometrie aber durch die mannigfaltigen herrlichen Entdeckungen und Erfindungen des berühmten René Descartes, lateinisch Renatus Cartesius genannt. Derselbe wurde am 31. März 1596 zu La Haye en Touraine aus einer adeligen Bretagneschen Familie geboren und in dem Jesuitenkollegium La Flèche erzogen, wo er mit Mersenne eine Jugendfreundschaft schloss, die bis an sein Ende dauerte. Er fühlte sich, wie er selbst erzählt, der scholastischen Philosophie seiner Zeit bald ganz entfremdet und suchte daher nach seinem Austritt aus dem Kollegium in seinem 19. Jahr allen Büchern zu entsagen und seinen Weg im Reiche der Erkenntnis allein zu suchen. Damals schon soll er im Besitz seiner schönsten geometrischen Entdeckungen gewesen sein, die er aber bis zu ihrer gänzlichen Reife noch vor der Welt zurückhalten wollte. Da er das Reisen für das beste Mittel hielt, sich Kenntnisse zu verschaffen, so ergriff er die seiner Zeit und seinen Verhältnissen angemessenste Art, fremde Länder zu sehen, indem er 1616 Militärdienste nahm,

wo er im Jahr 1620 der Schlacht bei Prag beiwohnte. Später verliess er die Kriegsdienste wieder und reiste als Privatmann in Deutschland, Holland, Frankreich und Italien, wo er aber in dem letzten Land den berühmten Galilei, wie es scheint, absichtlich nicht besuchte, wie er sich denn auch später immer als Gegner dieses Mannes zeigte. Am Ende seiner Wanderungen verkaufte er seine Güter in Frankreich und zog im Jahr 1629 nach Holland, um da ungestört seinen Studien zu leben. Hier schrieb er seinen Traité du système du monde, aber bei der Nachricht von Galileis Einkerkerung unterdrückte er dieses Werk wieder. Bald darauf geriet er in Streitigkeiten mit Roberval, der ihn mit Unrecht des Plagiats (Schriftdiebstahls) beschuldigt hatte, und mit Fermat, dem er, wie es scheint, nicht ganz Gerechtigkeit widerfahren liess. Nach langem Zureden seiner Freunde entschloss er sich endlich, seine Entdeckungen, die er in der Metaphysik und Mathematik gemacht hatte, herauszugeben, von denen er aber auf die erstere bei weitem das grösste Gewicht legte, daher er auch seine Geometrie nur, wie er selbst sagt, als ein leicht und flüchtig bearbeitetes Kapitel seiner allgemeinen Methodenlehre anhängte. Die Nachwelt hat dieses Urteil umgekehrt, da er bei ihr noch als grosser Geometer lebt und als Metaphysiker ganz vergessen ist. In der Mathematik gebührt ihm das Verdienst, die Bezeichnung der Potenzen durch Exponenten auf die noch jetzt gewöhnliche Art und vor allem die Anwendung der Algebra auf die Geometrie eingeführt zu haben, so dass er als der eigentliche Begründer der analytischen Geometrie zu betrachten ist. Er lehrte zuerst, die Natur einer krummen Linie durch eine Gleichung zwischen ihren Koordinaten auszudrücken, wodurch der Fortgang der Mathematik und aller von ihr abhängigen Wissenschaften mehr als durch irgend eine andere Entdeckung gefördert wurde.

Durch seine Metaphysik in mehrfache Streitigkeiten verwickelt, folgte er einem Ruf der Königin Christine von Schweden an ihren Hof. Auf seine Bitten wurde er hier von allen Lasten des Hofzeremoniells befreit, wofür er täglich um 5 Uhr Morgens zu der Königin in die Bibliothek derselben zu kommen sich verpflichtete. Allein sein bereits sehr geschwächter Körper konnte dem rauhen Klima seines neuen Vaterlandes nicht lange widerstehen. Er wurde von einer Brustkrankheit befallen und starb am 11. Februar 1650 in einem Alter von 54 Jahren. Die Königin liess ihm sein Grabmal unter die der ersten Familien Schwedens setzen, aber der französische Gesandte reklamierte ihn für Frankreich, und seine Leiche ward im Jahr 1666 nach Paris gebracht. Seine sämtlichen Werke erschienen zu Amsterdam 1690—1701 und wieder 1713 in neun Quartbänden.

Schon vor Descartes waren, wie bereits erwähnt, geometrische Fragen mit Hilfe der Algebra aufgelöst, allein diese betrafen nur einzelne Vergleichungen bestimmter, miteinander verbundener gerader Linien, während Descartes alle Eigenschaften einer krummen Linie in eine algebraische Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen schloss, in der Absicht, um aus derselben alle Eigenschaften einer krummen Linie vermittelst algebraischer Lehrsätze und Auflösungsmethoden abzuleiten. Dadurch eröffnete er der Geometrie ein weites, fruchtbares Feld, das von andern Mathematikern mit dem grössten Glück betreten wurde.

„Die Geometrie der Alten, oder wie sie gewöhnlich genannt wird, die Euklidische Geometrie betrachtet die geometrischen Grössen als gegeben in fester, unabänderlicher Form, und untersucht ihre Eigenschaften absolut oder in Vergleich zu andern gegebenen geometrischen Grössen. Durch die Klarheit und Bestimmtheit der Begriffe, die sie dabei entwickelt, durch die Konsequenz in der Verbindung derselben, durch die Einfachheit und strenge Aufeinanderfolge

in der Darstellung hat sie von jeher die allgemeine Bewunderung erregt. Man betrachtete sie deshalb als das beste Mittel zur strengen Schulung des Denkens. Dadurch aber machte man sie zu einer toten Sprache, an deren weitere Ausbildung nicht gedacht wurde. Die der Euklidischen Geometrie anhaftenden Mängel: der Fortschritt vom einzelnen zum einzelnen und infolge davon keine Spur über den Zusammenhang geometrischer Gestalten, das Fehlen jeder wissenschaftlichen Anordnung des Stoffes, sowie allgemeiner Prinzipien und Methoden, wurden nicht bemerkt. Im Gegenteil. Da man die Ueberzeugung gewann, dass von dem festgeschlossenen Bau des Gebäudes nichts hinweggenommen oder hinzugesetzt werden konnte, dass es unmöglich sei, daran zu rütteln, so hielt man die Geometrie der Alten für das Vollkommenste, was in dieser Hinsicht geschaffen werden konnte."

Die Ausbildung nun, welche die Algebra im 16. und 17. Jahrhundert erhalten hatte, erweckte in Descartes den Gedanken, durch eine Verbindung der Geometrie mit der Algebra die erstere aus ihren Banden zu befreien. Indem er die allgemeine Zeichensprache, durch welche die Algebra so ungemein gefördert worden war, auf geometrische Grössen zur Anwendung brachte, und das Grundprinzip der Geometrie, die Kontinuität (oder Stetigkeit, Ungetrenntheit im Raum wie in der Zeit) erkannte, so dass es ausreichend war, um z. B. den Charakter einer krummen Linie zu erforschen, die Eigentümlichkeit eines Punkts derselben zu untersuchen, vermochte Descartes das, was man bisher durch Worte ausgedrückt hatte, in Zeichen darzustellen. Durch diese Entdeckung von Descartes erhielt die Geometrie eine allgemeine Methode zur Untersuchung der Eigenschaften räumlicher Grössen, wovon in den Werken der alten Geometrie nicht die geringste Spur sich findet."

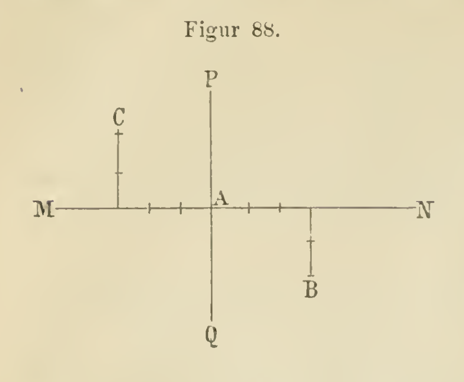
Die Geometrie des Descartes erschien 1637 in drei Büchern, in deren erstem er zeigt, wie die arithmetischen Grundoperationen geometrisch gedeutet werden können, und kommt dann auf die Konstruktion der Gleichungen ersten und zweiten Grades. Descartes gibt zuerst den negativen Wurzeln eine faktische Bedeutung, indem er sie als geometrisch ebensogut darstellbar nachweist, als die positiven. Descartes geht im zweiten Buch seiner Geometrie auf die krummen Linien und die Aufgaben höheren Grades über. Er bemerkt im Anfang, wie die Alten drei Arten von Problemen unterschieden hätten: ebene, körperliche und lineare; die ersteren lösten sie mit Hilfe des Lineals und des Kreises, die zweiten mittels der Kegelschnitte und die letzteren durch Anwendung höherer Kurven, die sie mit dem Namen „mechanische" bezeichneten zum Unterschied von den Kegelschnitten, die, weil noch an körperlichen Gebilden hervortretend, „geometrische" genannt wurden. Er zeigt dann, wie in der Algebra den ebenen Problemen die Gleichungen ersten und zweiten Grades, den körperlichen diejenigen dritten und den linearen diejenigen vierten Grades entsprechen. Im dritten Buch behandelt er einige algebraische Eigenschaften der Gleichungen und geht dann auf die Lösung der berühmten Probleme dritten Grades, Duplikation des Würfels und Dreiteilung des Winkels über. Er weist nach, dass alle Probleme dritten Grades auf diese beiden Lösungen zurückzuführen sind. Indem er dann auf die höheren Gleichungen übergeht, zeigt er, wie die Lösung derselben gleichbedeutend sei mit der Auffindung dreier und mehr mittlerer Proportionalen und der Teilung eines Winkels in vier, fünf und mehr Teile.[1])

„Die erste Rückwirkung der neuen Geometrie auf die Algebra betraf die Lehre von den Gleichungen. Man denke sich zwei zu einander senkrechte Achsen $MN$ und $PQ$; die Linien, welche in der Richtung $MN$ genommen werden,

[1]) Suter.

bezeichne man durch $x$ und die in der Richtung $PQ$ durch $y$; $A$ sei der Ausgangspunkt. Will man nun andeuten, dass ein Punkt in der Linie $MN$ liege und von $A$ z. B. 6 m weit entfernt sei, so kann er sowohl auf der rechten als auf der linken Seite von $A$ liegen; um diese Unbestimmtheit aufzuheben, bezeichnet man die eine Richtung, z. B. die rechte Seite, mit + und dann die linke mit —, so dass also, wenn $x = +3$, ein Punkt auf der rechten, wenn $x = -3$, ein Punkt auf der linken Seite gemeint ist. Ebenso verhält es sich mit der zweiten Richtung, $PQ$; $y = +2$ bedeutet eine Entfernung von $MN$ um 2 m nach oben und $y = -2$ eine solche nach unten. Die Lage eines Punkts gegen die Achsen ist nun gegeben, wenn seine Koordinaten $x$ und $y$ mit den entsprechenden Zeichen gegeben sind; ist z. B. $x = +3$ und $y = -2$, so liegt der Punkt in $B$, ist aber $x = -3$ und $y = +2$, so liegt er in $C$. Hat man nun die Gleichung einer Kurve, z. B.:

Figur 88.




$$5y^2 - 6xy + 3x^2 - 5x - 12 = 0$$

und verlangt man zu wissen, in welchen Punkten sie durch die Achse $MAN$ geht, so darf man nur beachten, dass in diesem Fall $y = 0$ ist. Man setze daher in der unbestimmten Gleichung für $y$ den Wert 0, so erhält man den dazu gehörigen Wert von $x$ aus der Gleichung

$$3x^2 - 5x - 12 = 0$$

und hieraus

$$x = +3 \text{ und } x = -\frac{4}{3};$$

$x = +3$ zeigt an, dass die krumme Linie rechts von $A$ in einer Entfernung von 3 m durch $MN$ geht, und $x = -\frac{4}{3}$, dass dies auch auf der linken Seite von $A$ stattfindet in einer Entfernung von $1^1/_3$ m." [1])

Roberval dehnte die eifersüchtige Rivalität, welche zwischen ihm und Descartes bestand, soweit aus, dass er dessen Geometrie bis ins kleinlichste gehend kritisierte, wodurch er aber gerade zur Verbreitung derselben wesentlich beitrug. Anderseits gab er aber noch dadurch gewissermassen eine Ehrenerklärung, dass er uns eine geschickte Anwendung dieser Methode auf die Konstruktion von Oertern vermittelst ihrer Gleichungen hinterlassen hat.

Nach dem Erscheinen der Geometrie von Descartes durchdrang deren Geist und Bedeutung besonders De Beaune (1601—1651) und letzterer erleichterte ihre Lektüre durch Anmerkungen, die von Descartes selbst sehr geschätzt wurden und welche er bei solchen Stellen hinzufügte, die wegen ihrer Kürze und wegen der Neuheit des Gegenstandes selbst den vorzüglichsten Geometern Schwierigkeiten machten.

Schooten (16..—1659) schrieb einen ausführlichen Kommentar zur Geometrie des Descartes und wandte dessen Methode vielfältig an. Das zweite Buch seiner geometrischen Exerzitationen ist eine Sammlung von Aufgaben, welche durch die gerade Linie allein aufgelöst werden können. Diese sind die ersten Beispiele, welche wir von dieser Gattung der Geometrie finden. Am Ende

[1]) Arneth.

dieses Buches löst Schooten unter dem Titel eines Appendix zwölf Aufgaben, in welchen er annimmt, dass Punkte oder Linien in gewissen Lagen durch hindernde Gegenstände unsichtbar oder unzugänglich werden.

„Die Hilfe, welche die Analysis der Geometrie leistete, war so wesentlich und so wunderbar, dass Schooten sich zu den Mathematikern bekannte, welche dieser Methode die Klarheit und Eleganz beimessen wollen, die sich in den Beweisen und Konstruktionen von Lehrsätzen und Aufgaben bei den Alten finden, indem er sie beschuldigt, den wahren Weg, welchen sie verfolgten, verschwiegen zu haben, um ihre Entdeckungen von der Nachwelt um so mehr bewundern zu lassen. Um diese Meinung zu unterstützen, behandelt Schooten viele Sätze auf beide Arten und zeigt an ihnen, dass sich wirklich die synthetische Methode immer aus der analytischen ableiten lasse. Schooten band sich aber nicht genug an die wahre Bedeutung, welche die Alten dem Wort Analysis unterlegten, und an die Beispiele für diese Methode, welche uns vorzüglich Pappos hinterlassen hat; und hierin allein ist der Grund seines Irrtums zu suchen. Denn weil er keine andere Analysis als die, welche auf der Anwendung der Algebra beruht, anerkannte und weil er davon vor Diophantus keine Spur fand, so schloss er, dass die Alten ihre Analysis verheimlicht hätten.“ [1])

Neben Sluze, Hudde, De Witt, Wallis, van Heuraet und Neil ist vor allem Huygens[2]) hervorzuheben, welcher sich vielfältige Verdienste erwarb und dessen Werke ausserordentlich zur Ehre der Geometrie beigetragen haben.

„Dieser grosse Geometer war nicht allein mit der Methode des Descartes und deren Gebrauch vollkommen vertraut, sondern er vervollkommnete sie sogar in mehreren ihrer Anwendungen. Aber seine unüberwindliche Vorliebe fesselte ihn an die Methode der Alten, durch welche die Kraft seines Genies die grössten Schwierigkeiten zu überwinden wusste.“ In dieser Hinsicht steht obenan seine Theorie der Evoluten oder der durch Abwicklung eines der ganzen Länge einer Kurve nach gespannten Fadens entstehenden neuen Kurve. Huyghens nennt die ursprüngliche Kurve, um die der Faden gespannt war, Evolute, und die durch Abwickelung entstehende „die durch Evolution beschriebene“. Nachdem er die allgemeinen Eigenschaften solcher Evoluten nachgewiesen hat, geht er zur Betrachtung der Cykloide über und weist auf einfachem Weg nach, dass die Evolute dieser Kurve wieder eine der ersten gleiche Cykloide ist.

Newton erwähnt seiner nie ohne den Beinamen des Grossen, von dessen Entdeckungen er immer mit grosser Bewunderung spricht. „Er hielt ihn für den gewandtesten Schriftsteller unter den damaligen Mathematikern und für den ausgezeichnetsten Nachahmer der Alten, die nach seiner Meinung wegen ihres Geschmacks und wegen der Form ihrer Beweise Bewunderung verdienen.“

Jedes einzelne Kapitel in seinem berühmten Werk De horologio oscillatorio genügt, um die grösste Bewunderung zu erregen. Das erste enthält die Beschreibung der Pendeluhren, welche zum erstenmal ein genaues Mass der Zeit

[1]) Chasles.

[2]) Christian Huyghens (Hugenius) wurde geboren am 14. April 1629 im Haag, studierte seit 1645 in Leyden die Rechte und Mathematik, machte dann grössere Reisen, liess sich dann in Paris nieder, wo er von 1666 an Mitglied der Akademie wurde. 1681 kehrte er in seine Vaterstadt zurück und starb daselbst am 8. Juni 1695. Er erfand die Anwendung des Pendels als Regulator der Uhr, sowie die Evolution und Cykloide, ergründete und vervollkommnete die Gesetze der Mitteilung der Bewegung durch Stoss, die Theorie der Schwungbewegung und die Gesetze der Zentralkräfte, verbesserte die Teleskope und Mikroskope und beschäftigte sich selbst ausdauernd mit dem Schleifen und Polieren der Linsen; er entdeckte den ersten Saturnsmond 1655 und den Saturnsring, sowie die Achsendrehung des Mars; ferner entdeckte er 1690 die Doppelbrechung des Kalkspaths und die Polarisation des Lichts durch Refraktion, und stellte die Undulationstheorie des Lichts auf.

gaben. Das zweite vervollständigt die wichtige Entdeckung Galileis von der beschleunigten Bewegung, wenn Körper freifallen oder auf geneigten Ebenen hingleiten. Das dritte Kapitel ist die berühmte Theorie der Evoluten. Im vierten Kapitel löst Huygens ganz allgemein und vollständig das Problem über die Mittelpunkte der Schwingung auf. In dieser Lösung erblickt man zum erstenmal eines der schönsten Prinzipien der Mechanik, welches seitdem unter dem Namen des Prinzips von der Erhaltung der lebendigen Kräfte bekannt ist. An das fünfte Kapitel endlich, in welchem Huyghens eine zweite Konstruktion seiner Uhren gibt, schliessen sich die dreizehn berühmten Sätze über die Zentrifugalkraft bei der Kreisbewegung.

Das Werk über das Licht ist eines der herrlichsten Denkmäler von dem Geist Huygens, welcher mit bewundernswertem Scharfsinn die Geometrie auf seine sinnreiche Wellentheorie anzuwenden wusste. Auch findet man darin das schöne mathematische Gesetz von der doppelten Strahlenbrechung beim isländischen Feldspath.

„Unter den Zeitgenossen des Huygens, welche am meisten zur Förderung der Geometrie beitrugen, müssen wir noch Barrow (1630—1677) nennen, den Lehrer Newtons auf der Universität zu Cambridge. Derselbe gab 1669 ein Werk voll der tiefsten Untersuchungen über die Eigenschaften der Kurven heraus."

„Seine Kenntnisse in der griechischen und arabischen Sprache setzten Barrow in den Stand, dass er der Wissenschaft dadurch einen wesentlichen Dienst leisten konnte, dass er sehr geschätzte Uebertragungen ins Lateinische lieferte von den Elementen und den Daten des Euklid, von den vier ersten Büchern des Apollonios, von den Werken des Archimedes und von der Sphärik des Theodosius. In allen diesen Werken finden sich die Beweise grossenteils umgearbeitet und ausserordentlich vereinfacht." [1])

Neben Barrow dürfte auch Tschirnhausen (1651—1708) ein Recht auf eine ausgezeichnete Stelle in der Geschichte der Geometrie haben. Es sei hier nur bemerkt, dass er eine neue und allgemeine Erzeugung der Kurven angab, indem er sich dieselben durch einen Griffel beschrieben dachte, der einen Faden spannt, welcher an seinen zwei Endpunkten befestigt ist und über mehrere andere feste Punkte hingleitet oder sich über eine oder mehrere Kurven von bekannter Natur umwickelt. Das Ziel, welchem Tschirnhausen in allen seinen geometrischen Spekulationen nachstrebte, war, die Geometrie leichter darzustellen, indem er davon überzeugt war, dass die wahren Methoden auch leicht seien, dass selbst die geistreichsten nicht die richtigsten seien, sobald sie zu sehr kompliziert sind, und dass die Natur für jede Sache etwas Einfachstes darbiete.

„In der bisherigen gedrängten Uebersicht der wunderbaren Fortschritte, welche die Geometrie in einem Zeitraum von dreissig Jahren gemacht hat, sind besonders zwei grosse Ideen als die Quelle dieser Fortschritte zu erkennen, nämlich das **Unteilbare** des **Cavalleri** und die auf krumme Linien angewandte Analysis des Descartes. Erstere schloss sich an die gewöhnten Formen und Verfahrungsarten der alten Geometrie an, während die zweite aus der Geometrie eine ganz neue Wissenschaft machte, von der in den Werken des Archimedes und Apollonios sich nicht die geringste Spur findet. Man nannte sie die gemischte oder analytische Geometrie.

Ausser diesen zwei Methoden bildete sich noch eine dritte Art von Geometrie aus, welche von Pascal und Desargues angewandt wurde und deren erste Anfänge sich in den Porismen Euklids finden.

[1]) Chasles.

Demnach zerfällt die Geometrie in drei Teile:

1) Die Geometrie der Alten, unterstützt durch die Lehren vom Unteilbaren und der zusammengesetzten Bewegung.

2) Die Analysis des Descartes.

3) Die reine Geometrie, oder die neue Geometrie, welche frei von jeder algebraischen Rechnung ist und nur die Verhältnisse der geradlinigen Entfernungen einer gewissen Art betrachtet. In diese Geometrie gehören jene Theorien mit ihren Anwendungen, denen man die Namen der Geometrie des Lineals und Geometrie der Lage gegeben hat, je nachdem man nur von den Durchschnitten gerader Linien oder von den Durchschnitten der Kurven und Oberflächen im Raum Gebrauch macht.

Von den drei hier erwähnten Arten der Geometrie bietet die Geometrie des Descartes die meisten Vorteile, und lässt sich allen geometrischen Vorstellungen, den alten wie den neuen, anpassen.

Einige Mathematiker blieben aber dennoch der Methode der Alten treu, unter denen besonders De la Hire hervorzuheben ist. Obgleich dieser Geometer mit der Analysis des Descartes vertraut war, so bereicherte er dessenungeachtet die reine Geometrie mit mehreren Werken, die im Stil der Alten geschrieben waren und dabei viel Glück machten. Sein Werk über die Kegelschnitte hat ein sehr bedeutendes Ansehen bei dem ganzen gelehrten Europa erlangt und lässt De la Hire als einen Originalschriftsteller über diesen Gegenstand betrachten. Denn obgleich seine Methode rein synthetisch wie die der Alten ist, so unterscheidet sie sich doch wesentlich von dieser. Die Alten hatten die Kegelschnitte am Kegel selbst betrachtet, aber nur um deren Entstehung aufzufassen und einige Haupteigenschaften derselben nachzuweisen, und sodann diese ersten Eigenschaften zur Aufsuchung und zum Beweis aller übrigen anzuwenden, so dass sie ihre Theorie der Kegelschnitte bildeten, ohne die Natur oder irgend eine Eigenschaft des Kegels zu kennen, und unabhängig von dem Kreis, welcher ihm zur Basis dient; selbst Apollonios beweist oft die Eigenschaften des Kreises auf dieselbe Art und zu gleicher Zeit, als die der Ellipse. De la Hire wählte einen mehr rationellen und mehr methodischen und folglich kürzeren und lichtvolleren Weg. Er fängt damit an, die Eigenschaften des Kreises, welche sich beim Kegel herausstellen müssen, aufzuführen, vorzüglich die, welche sich auf die harmonische Teilung beziehen; darauf erst macht er die Anwendung davon auf die Entdeckung und den Beweis der analogen Eigenschaften in den verschiedenen Schnitten des Kegels. Ausserdem war diese Methode damals deshalb noch merkwürdig, dass sie keinen Gebrauch vom Achsendreieck machte und sich ohne Unterschied auf alle Schnitte des Kegels anwenden liess.

Auch Guarini gab 1671 ein Werk über die Kegelschnitte heraus, worin er zum Beweis der Eigenschaften derselben vielfältig Gebrauch von der Betrachtung des Kegels macht. Man findet darin einen sehr einfachen, auf alle drei Kegelschnitte zugleich anwendbaren Beweis für die Eigenschaft, dass die Produkte aus den Segmenten paralleler Sehnen ein konstantes Verhältnis haben, wozu man sonst mehrere Präliminarsätze kennen musste. Diese Methode war ein Fortschritt in der Theorie der Kegelschnitte, aber Guarini verfolgte diesen nicht so systematisch und nicht mit dem Talent des De la Hire.

Das Werk des letzteren ist in neun Bücher geteilt; das erste, welches die Grundlage für alle übrigen ist, behandelt nacheinander die Eigenschaften der harmonischen Teilung einer geraden Linie, die eines harmonischen Bündels und endlich die Linien, welche im Kreis harmonisch geteilt werden. Dieses Buch

ist eine Einleitung, woraus sich später leichte und allgemeine Beweise für Theoreme ergeben, welche den Alten lange und mühsame Entwickelungen kosteten.

In seinem Werk von 1679 definiert De la Hire die Kegelschnitte als Kurven von der Beschaffenheit, dass die Summe oder die Differenz der Entfernungen jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten konstant ist, oder auch, dass jeder Punkt gleich weit von einem festen Punkt und von einer festen Geraden entfernt ist.

In derselben Zeit erdachte auch Newton (1642 – 1727) eine Methode, deren Hauptzweck der war, in der Ebene Umgestaltungen von Figuren auszuführen, wobei den Punkten Punkte und den Geraden Gerade entsprächen, und wo gewisse konvergierende Gerade parallel würden. Er gab diese Methode in dem ersten Buch seiner Prinzipia und zeigte darin, wie sie zur Verwandlung irgend eines Kegelschnitts in einen Kreis und zur Vereinfachung schwieriger Probleme dienen könne. Diese Untersuchungen genügen Newton, alle Phänomene des Himmels seinem Gravitationsgesetz zu unterwerfen und aus diesem einzigen Gesetz aus Vernunftgründen die Erklärung und die Berechnung aller Bewegungen der Himmelskörper abzuleiten.

Maclaurin[1]) teilte die Neigung Newtons für die reine Geometrie, und indem er die Methode Newtons in der ganzen Strenge der griechischen Schule beweisen wollte, führte er eine Menge von vorzüglichen synthetischen Beweisen für verschiedene Sätze der Mechanik und der höheren Geometrie an.

Der berühmte Astronom Halley (1656—1742), der sich durch vielseitige Bildung und genaue Bekanntschaft mit der Geometrie der griechischen Schule auszeichnete, erwarb sich durch seine treuen Uebersetzungen mehrerer Hauptwerke der alten Geometer ein herrliches Denkmal. Man zeichnet besonders seine vortreffliche Ausgabe des Werks über die Kegelschnitte des Apollonios aus, worin das achte Buch (dessen Text nicht wieder aufgefunden ist) mit grossem Talent restituiert enthalten ist. Angehängt sind die beiden Bücher von Serenus über die Schnitte des Kegels und Cylinders. Eine Ausgabe der Sphaerica des Menelaos wurde von Halley vorbereitet, kam aber erst 1758 heraus.[2])

„Leibniz[3]) hat auf dem Gebiet der Geometrie mittels einer Charakteristik eine neue Bahn eröffnet. Die Behandlung geometrischer Probleme mit Hilfe der Algebra, wie sie durch Vieta und Descartes üblich geworden war, genügte insofern nicht allen Anforderungen, als die Darstellung der algebraisch gewonnenen Resultate durch Konstruktion in Vergleich zu den durch Einfachheit und Eleganz mustergültigen Leistungen der Geometer des Altertums weit zurückstand. Da bei dieser Behandlung nicht alle Beziehungen, welche die geometrische Figur darbietet, sondern nur die Quantität der geometrischen Grössen in Betracht gezogen wurde, so kam Leibniz auf die Idee, dass die bemerkten Schwierigkeiten beseitigt werden könnten, wenn ausser der Quantität auch die Qualität, d. h. die Form der geometrischen Grössen, berücksichtigt würde; denn das sei die wahre geometrische Analysis, die nicht bloss die Gleichheit und Proportionalität in Betracht ziehe, sondern auch die Aehnlichkeit, die aus der Form der Figur entspringt, und die Kongruenz, die durch die Verbindung der Gleichheit und Aehnlichkeit hervorgeht. Insofern nun nach der allgemein angenommenen Sitte,

[1]) Maclaurin, geboren 1698 zu Kilmoddau in Schottland, wurde 1717 Professor der Mathematik zu Aberdeen, und drei Jahre später gab er seine Abhandlung über die Kurven heraus, die selbst Newton bewundert haben soll. Er starb am 14. Juni 1746. Seine vorzüglichsten Werke sind: Geometria organica, London 1720; Ueber die Fluxionsrechnung, Edinburg 1742; und sein Handbuch der Algebra, das sich durch Präzision und Eleganz des Ausdrucks auszeichnet.

[2]) Nach Chasles. — [3]) Geboren 21. Juni 1646 zu Leipzig, gestorben 14. November 1716.

die Eckpunkte der Figuren zu bezeichnen, durch die dazu gebrauchten Buchstaben allein teilweise schon Eigenschaften der Figuren ausgedrückt werden, so wurde Leibniz hierdurch veranlasst, darüber nachzudenken, ob nicht lediglich durch blosse Nebeneinanderstellung und Umstellung dieser Buchstaben alle Eigenschaften, der ganze Charakter der Figuren dargestellt werden könnten; möglicherweise würde sich alsdann ein Kalkül ergeben, der mit und an den Buchstaben allein ausgeführt, nicht nur die Definitionen produzierte, sondern auch die Auflösungen der Probleme finden liesse, und zwar nach einer bestimmten Methode und nicht wie bisher regellos und nach Willkür. Da bisher niemand dergleichen versucht hatte, so sah sich Leibniz genötigt, den Gegenstand von den ersten Anfängen an zu erörtern. Er geht von dem absoluten Raum aus; ein in demselben angenommener Punkt drückt lediglich seine Lage aus; werden dagegen zwei Punkte gleichzeitig betrachtet, so ist durch sie die zwischen ihnen gezogene gerade Linie nicht allein der Lage, sondern auch der Grösse nach bestimmt; sie drücken demnach die Beziehungen der Linie vollständig aus, und es genügt, anstatt der Linie die beiden bestimmenden Punkte in Betracht zu ziehen. Sind also zwei Punkte $A$, $B$ zweien anderen $C$, $D$ kongruent, so sind auch die dadurch bestimmten Linien kongruent, und sind die drei nicht in einer geraden Linie liegenden Punkte $A$, $B$, $C$ drei andern $D$, $E$, $F$ kongruent, so ist auch die durch die drei ersten Punkte bestimmte Kreisperipherie der durch die drei letzten bestimmten kongruent. Allgemein drückt Leibniz das hierbei zu Grunde liegende Axiom so aus: Wenn das Bestimmende kongruent ist, so wird es auch das dadurch Bestimmte sein, vorausgesetzt, dass ein und derselbe Modus des Bestimmens bleibt. Was nun die Rechnung mit diesen Charakteren anbelangt, so hat sich Leibniz vorzugsweise auf die Bestimmungsform der Kongruenz beschränkt, indess, wie es scheint, nur um zu zeigen, was sich mittels dieses Begriffs für die in Rede stehende Disciplin gewinnen lässt. Er reicht für die einfachsten Relationen aus, namentlich wenn es sich nur um die Bestimmung eines Punkts oder einer Ebene handelt, dagegen ist er für kompliziertere Fälle zu eng. Leibniz hat dies selbst erkannt, denn er wollte ausserdem noch die Aehnlichkeit und die Bewegung in Betracht ziehen.“ [1])

Hier sei noch des Jesuiten Tommaso Ceva aus Mailand gedacht (geb. 1648, gest. 1736), welcher vierzig Jahre lang Mathematik lehrte und von dem ein Lehrsatz herrührt, der in den planimetrischen Lehrbüchern Aufnahme gefunden hat.

Der Lehrsatz des Ceva lautet: Schneiden sich drei Transversalen aus den Ecken eines Dreiecks in einem Punkt, so sind die beiden Produkte aus je drei getrennt liegenden Seitenabschnitten einander gleich.

Figur 89.

Liegt der Schnittpunkt der Transversalen innerhalb des Dreiecks, so liegen die Fusspunkte der Transversalen auf den Seiten selbst; liegt der Schnittpunkt ausserhalb, so fällt nur ein Fusspunkt auf die zugehörige Dreiecksseite selbst, die beiden andern fallen in die Verlängerungen der zugehörigen Seiten. In beiden Fällen wird behauptet:

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE.$$

Beweis: Die Dreiecke $OAB$ und $OAC$ haben dieselbe Grundlinie $OA$; ihre Flächen verhalten sich also zu einander wie die zu dieser Grundlinie gehörigen

[1]) Gerhardt.

Höhen, d. h. wie die von $B$ und $C$ auf die verlängerte $AO$ gefällte Senkrechten $BH$ und $CG$. Aber $BH:CG = BD:CD$, mithin

$$\triangle OAB : OAC = BD : CD$$

Analog $$\triangle OBC : OBA = CE : AE$$

$$\triangle OCA : OCB = AF : BF.$$

Setzt man diese Proportionen zusammen, nachdem man links die zu beiden Seiten der Divisionszeichen stehenden gleichen Glieder fortgehoben hat, so ergibt sich:

$$1:1 = BD \cdot CE \cdot AF \; : \; CD \cdot AE \cdot BF$$

$$AF \cdot BD \cdot CE = BF \cdot CD \cdot AE.$$

Mit dem Ende des 17. Jahrhunderts schliesst das Zeitalter der mittleren Geometrie, die entweder ganz nach dem Muster der Alten geformt war oder sich mit der Algebra verband, und sich der Summierung unendlicher Reihen mit mehr Kühnheit bediente, als die Geometrie der Alten. Die Analysis des Unendlichen, welche Newton und Leibniz erfanden, setzte die Geometer in den Stand, nicht allein alle Aufgaben, wobei neben den veränderlichen Grössen selbst auch die Grenzverhältnisse ihrer Veränderungen in Betracht kommen, leicht und allgemein aufzulösen, sondern auch von diesen Verhältnissen durch die Integralrechnung zu den endlichen Grössen selbst zu gelangen. Also wurden Quadraturen, Kubierungen, Komplanationen, Lage des Schwerpunkts, womit sich die vorhergehenden Geometer viele Mühe und auch viele Freude gemacht hatten, nur eine vorbereitende Anwendung der neuen Rechnung, um zu schwereren Untersuchungen sich geschickt zu machen. Von dieser Zeit an sind Analysis, Geometrie und reine Mechanik so genau miteinander verschwistert, dass die Geschichte der einen immer in die der andern eingreift. Doch behielt die Geometrie der Alten immer noch ihre Verehrer, besonders in Italien und England. Dem letzteren Land verdankt man die besten Aufgaben der alten Geometer und Wiederherstellung ihrer verlorenen Schriften. Die Kegelschnitte sind von den Engländern häufig bearbeitet, immer nach der Methode der Alten, und auch die analytischen Untersuchungen der Engländer haben eine altgeometrische Gestalt.

---

# Die Geometrie der Neuzeit.

Die Fortschritte, welche die Geometrie im 18. Jahrhundert machte, wurden allein bewirkt durch Fortschritte in der Analysis. Auf der von Leibniz und Newton gleichzeitig eingeschlagenen Bahn schritten fort die Gebrüder Bernoulli, Leonhard Euler, der Begründer der analytischen Trigonometrie, Cotes, dessen Name in der Lehre von der Kreisteilung fortlebt, Clairaut, welcher zuerst über doppelt gekrümmte Kurven schrieb, Parent, der die Geometrie des Descartes von der Ebene auf den Raum ausdehnte, und Cramer, der ein meisterhaftes Lehrbuch der Kurventheorie lieferte, während Maclaurin, Simson und Stewart als Vertreter der synthetischen Geometrie zu nennen sind.

Jakob Bernoulli, geb. 1654, gest. 1705 als Professor der Mathematik in Basel, entdeckte die elastischen, die isochronischen und die isoperimetrischen Kurven, die Kettenlinie und andere der höheren Mathematik angehörige Kurven und ist als der erste Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt. Sein Vater Nikolaus begleitete eine hohe Stelle in der Baselschen Republik und hatte

11 Kinder. Jakob war zum geistlichen Stand bestimmt und konnte die Mathematik nur heimlich gegen den Willen seines Vaters studieren. Sein Ruhm datiert von dem Jahr 1684, wo Leibniz seine ersten Entdeckungen über die Differentialrechnung bekannt machte. Seit dieser Zeit verwendete er und sein Bruder Johann alle Kraft auf die Ausbildung dieser Rechnung, so dass Leibniz dieselbe ebensowohl ihr als sein Eigentum nannte. Die zwei ersten Aufsätze über Integralrechnung erschienen von ihm in dem Jahr 1691.

Johann Bernoulli, des vorigen Bruder, geb. 1667 und von seinem Vater zum Kaufmann bestimmt, ging, wie jener, seinen eigenen Weg. Auf seiner Reise nach Frankreich lernte er mehrere Mathematiker kennen, die ihn für ihre Wissenschaft gewannen. Seit 1692, wo er nach Basel zurückkehrte, begann er seine Korrespondenz mit Leibniz, die bis an sein Ende währte. 1693 wurde er Professor der Mathematik in Wolfenbüttel, kehrte aber schon im nächsten Jahr wieder nach Basel zurück, wo er Doktor der Medizin wurde. 1695 wurde er Professor der Mathematik in Groningen, wo er blieb, bis er 1705 seinem Bruder Jakob für dieselbe Stelle in Basel nachfolgte und hier auch 1748 starb. Er ist der Lehrer des grossen Leonhard Euler gewesen.

Euler, Leonhard, einer der grössten Mathematiker, wurde am 15. April 1707 zu Basel geboren. Sein Vater, Paul, reformierter Prediger des benachbarten Dorfes Riechen, unterrichtete selbst seinen Sohn, den er übrigens für den geistlichen Stand bestimmen wollte, in den ersten Elementen der Mathematik, worauf er an die Universität von Basel geschickt wurde, wo er Johann Bernoulli zum Professor erhielt. 1733 wurde Euler von Katharina I. an die Petersburger Akademie berufen und drei Jahre später erschien seine Mechanik, zugleich mit seiner Theorie der Musik, seiner Arithmetik und zahlreichen Abhandlungen in den Memoiren dieser Akademie. 1741 wurde Euler Präsident der Berliner Akademie. Durch seine angestrengten Nachtwachen hatte er schon 1735 ein Auge verloren und 1766 erblindete auch das andere. Dadurch wurde aber seine wundervolle litterarische Fruchtbarkeit nicht aufgehalten, indem er seine weiteren sehr zahlreichen Arbeiten einem der Mathematik nicht ganz unkundigen Bedienten diktierte. In demselben Jahr 1766 ging er auf Katharinas II. Ruf wieder nach Petersburg zurück, wo 1771 sein Haus abbrannte und wo auch er von den Flammen verzehrt worden wäre, wenn den alten blinden Mann nicht ein Fremder gerettet hätte. Am 7. Sept. 1783 spielte er, nach Tisch gemütlich seine Pfeife rauchend, mit seinen Enkeln, als er plötzlich vom Stuhl fiel und starb.

Sein vorzüglichstes Geschäft und gleichsam der Zweck seines Lebens war die Vervollkommnung der mathematischen Analysis. Hierher gehört besonders seine Einführung eines sehr vervollkommneten Gebrauchs der trigonometrischen Funktionen und der unendlichen Reihen. Er erweiterte mehr als irgend ein anderer das Gebiet der Mathematik und gab ihr, durch seine Zurückführung der Geometrie auf Analyse, eine neue Gestalt. Ebenso ausgezeichnet war er durch seine Klarheit des Vortrags, indem er, selbst bei den schwersten Untersuchungen, sich bis zur Fassungskraft eines Kindes herablassen konnte. Am wunderbarsten aber erscheint er durch die ausserordentliche Fruchtbarkeit seines Geistes, mit der er während seines langen Lebens vom 20. bis zu seinem 76. Jahr alle Memoiren und gelehrten Journale seiner Zeit mit seinen Arbeiten erfüllte, und selbst bei seinem Tode noch der Akademie von Petersburg mehrere Kisten mit den trefflichsten Aufsätzen hinterliess, die bis zu dem Jahr 1830 noch jeden Band ihrer Arbeiten zierten.

Der Lehrsatz von Euler, welcher sich in den Lehrbüchern der Planimetrie findet, ist folgender: In jedem Dreieck liegen der Durchschnittspunkt der drei Mittellinien (der Schwerpunkt), der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt

dreier beliebiger Ecktransversalen und der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei von den Halbierungspunkten der Seiten zu diesen Transversalen gezogenen Parallelen in einer geraden Linie: und zwar teilt der Schwerpunkt die Verbindungslinie der beiden andern Durchschnittspunkte im Verhältnis 1:2.

Voraussetzung: $\overline{DB} = \overline{DC}$, $\overline{EA} = \overline{EC}$, $\overline{FA} = \overline{FB}$

$\overline{DX} \parallel AO$ und $EX \parallel \overline{BO}$.

Behauptung: Die drei Punkte $X$, $S$, $O$ liegen in einer geraden Linie, und es verhält sich $OS : XS = 2 : 1$.

Beweis: Ein Lehrsatz der Planimetrie lautet: „Je zwei seitenhalbierende Transversalen eines Dreiecks schneiden sich so, dass ihre Abschnitte sich zu einander verhalten wie 2:1.“ Demnach besteht die Proportion:

$$\overline{AS} : \overline{SD} = 2 : 1.$$

Und ein anderer Satz der Planimetrie lautet: „Wenn man von einem Punkt in der Ebene eines Dreiecks Strahlen nach den Ecken und von dem Halbierungspunkt jeder Seite eine Parallele zu dem nach der Gegenecke gehenden Strahl zieht, so schneiden sich diese drei Parallelen in einem Punkt. Die nach den Ecken gerichteten Strahlen sind doppelt so gross, wie die ihnen parallelen, nach den Halbierungspunkten der Seiten gezogenen Strecken.“ Nach der zweiten Hälfte dieses Satzes ist also

Figur 90.

$$OA : XD = 2 : 1$$

$$\angle OAS = \angle XDS$$

(als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen), somit ist

$$\triangle SAO \sim \triangle SDX$$

und also

$$\angle OSA = \angle SDX$$

als homologe Winkel in ähnlichen Dreiecken. Daher ist $OSX$ eine gerade Linie (nach der Umkehrung des Lehrsatzes über Scheitelwinkel) und somit verhält sich

$$\overline{OS} : \overline{XS} = AS : SD = 2 : 1.$$

Mathieu Stewart (1717—1785), ein Schüler von Maclaurin und Simson, erbte von seinen Lehrern den Geschmack für die alte Geometrie. In seinem 1761 erschienenen Werk: „Physikalische und mathematische Abhandlungen, enthaltend die Erklärungen mehrerer wichtiger Punkte der physischen Astronomie und eine neue Methode, die Distanz der Sonne von der Erde durch die Theorie der Schwere zu bestimmen“, eine sehr ausgedehnte Theorie der Centripetalkraft, die Berechnung der Entfernung der Sonne von der Erde und das so schwierige Problem der drei Körper, in dem es sich darum handelt, die gegenseitige Wirkung der Sonne, der Erde und des Mondes zu berechnen, sind diese Aufgaben in einer Reihe von Sätzen gelöst, die keine andern mathematischen Kenntnisse erfordern, als die Elemente der ebenen Geometrie und der Kegelschnitte. Die Ordnung und Klarheit der Sätze, die Einfachheit ihrer Beweise und die Natur der schwierigen Aufgaben, welche dadurch gelöst wurden, erwarben Stewart das grösste Lob und bewährten ihn als einen der gelehrtesten Geometer dieser Epoche.[1])

[1]) Chasles.

Ein anderes Werk Stewarts, das Buch der allgemeinen Theoreme, enthält unter andern folgenden Satz: Wenn man auf einer geraden Linie drei Punkte $A$, $C$, $B$ annimmt und irgend einen andern Punkt $D$ ausserhalb oder in der Richtung dieser Geraden, so hat man:

$$DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot AC - DC^2 \cdot AB = AB \cdot AC \cdot BC.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes soll der Kürze halber durch folgende Rechnung nachgewiesen werden. In der Geraden $AD$ sind die entsprechenden Entfernungen der einzelnen Punkte durch Ziffern angedeutet. Setzt man in die obige Gleichung nun die entsprechenden Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$27^2 \cdot 9 + 11^2 \cdot 7 - 20^2 \cdot 16 = 16 \cdot 7 \cdot 9$$

oder

$$6561 + 847 - 6400 = 1008,$$

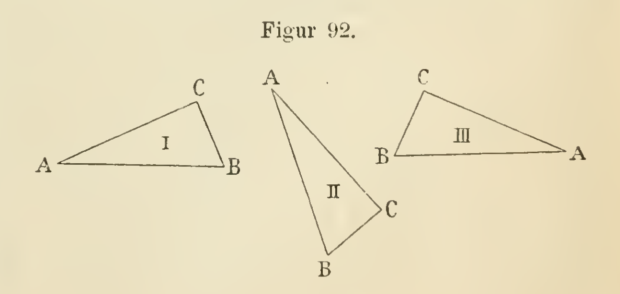
wodurch die Gleichung als richtig erwiesen ist.

Figur 91.

Gauss (geb. 30. April 1777 zu Braunschweig, gest. 23. Febr. 1855 in Göttingen) suchte zur grösseren Sicherheit und zur Kontrolle des Kalküls soweit als thunlich die geometrische Betrachtung seinen Rechnungen zu unterbreiten. Bereits in seiner ersten Schrift von 1799 finden sich Spuren von der geometrischen Deutung der imaginären Grössen, worüber er viel später, im Jahr 1831, ausführlicher sich ausgesprochen hat. Sie hat in der Theorie der Funktionen Epoche gemacht und ist für alle Zeiten massgebend geblieben. Ferner war Gauss in Betreff der Theorie der Parallellinien der Ueberzeugung, dass der 11. Euklidische Lehrsatz nicht bewiesen und dass die Geometrie nur insofern als ein konsequentes Gebäude betrachtet werden könne, wenn dieser Satz als Axiom an die Spitze derselben gestellt würde. Wollte man dagegen dieses Axiom, dessen näherungsweise Richtigkeit durch die Erfahrung bestätigt würde, nicht zugeben, so folge daraus eine andere, ganz selbständige Geometrie, die er gelegentlich einmal verfolgt und mit dem Namen Antieuklidische Geometrie bezeichnet habe."

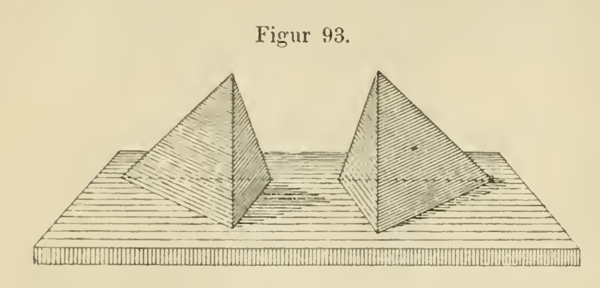
Es dürfte hier am Platz und nicht uninteressant sein, zu bemerken, dass Gauss die drei Dimensionen des Raumes als eine spezifische Eigentümlichkeit der menschlichen Seele betrachtete. Wir könnten uns, sagt er, etwa in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewusst sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken. Einem solchen Wesen, das sich nur zweier Dimensionen bewusst ist, würde manches unmöglich scheinen, was uns, die wir uns dreier Dimensionen bewusst sind, nicht die mindeste Schwierigkeit macht. In beistehender Figur sind z. B. die gleichnamigen Seiten u. Winkel der drei Dreiecke gleich gross. Die Dreiecke $I$ und $II$ kann man auch leicht zur Deckung bringen, wenn man das eine in der Ebene verschiebt. Bei $I$ und $III$ ist aber durch blosse Verschiebung in der Ebene keine Deckung möglich; ein Wesen, das sich nur zwei Dimensionen vorzustellen vermag, würde es also für unmöglich halten, die beiden Dreiecke überhaupt zur Deckung zu bringen. Nun wissen wir aber, dass

Figur 92.



diess wohl möglich ist, wenn wir nur das eine Dreieck *III* aus der Ebene herausdrehen, indem wir z. B. die Seite *AB* ruhig liegen lassen, die Spitze *C* aber in die Höhe heben und einen Halbkreis beschreiben lassen, worauf das Dreieck wieder in die Ebene fällt und nun bloss noch gehörig verschoben werden muss. In derselben Verlegenheit wie unsere hypothetischen zweidimensionalen Wesen gegenüber den beiden symmetrischen Dreiecken *I* und *III* befinden wir selbst uns angesichts symmetrischer räumlicher Objekte, z. B. der beiden Tetraeder Figur 93; obwohl dieselben in allen Stücken übereinstimmen, können wir sie doch nicht zur Deckung bringen, so wenig wie wir den linken Handschuh an die rechte Hand ziehen können. Könnten wir die Gegenstände aus dem Raum von drei Dimensionen in den von vier Dimensionen bringen, so würde dies nach dem Zurückbringen in den dreidimensionalen Raum wohl möglich sein.[1])

Figur 93.



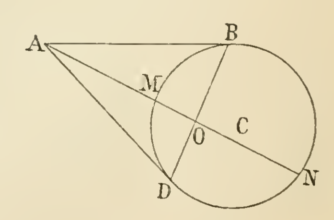
An der Schwelle des 19. Jahrhunderts wurde die reine Geometrie, nach einer Ruhe von beinahe einem Jahrhundert, um eine neue Lehre, die beschreibende Geometrie, bereichert, welche die notwendige Ergänzung der analytischen Geometrie des Descartes war, und welche, wie diese, eine neue Aera in der Geschichte der Geometrie bezeichnet. Ihr Schöpfer ist Gaspard Monge (geb. 1746 in Beaune, gest. 1818).

[1]) Nimmt man als Element im Raum nicht den Punkt, wie es gewöhnlich geschieht, um die drei Dimensionen des Raums, Länge, Breite und Höhe zu demonstrieren, sondern eine beliebige Linie oder Fläche an, so gelangt man zu wesentlich andern Ergebnissen. Benutzt man z. B. die gerade Linie als Element, so erscheint der Punkt als zusammengesetztes Gebilde, als Schnittpunkt zweier Geraden. Die sämtlichen Geraden einer Ebene, die durch einen Punkt gehen, bilden dann eine einfach-unendliche Mannigfaltigkeit. Nun erhält man aber jedenfalls alle geraden Linien einer Ebene, wenn man von jedem der Punkte einer geraden Linie (in der Ebene) aus alle in der Ebene möglichen Geraden zieht. Da die Punkte einer Geraden eine einfach-unendliche Mannigfaltigkeit bilden, so erscheint die Ebene, als Gesamtheit der in ihr liegenden Geraden betrachtet, zweifach-unendlich mannigfaltig. Um ferner alle Geraden im Raum zu erhalten, genügt es, zwei Ebenen anzunehmen und von jedem Punkt der einen eine gerade Linie nach jedem Punkt der andern zu ziehen. Da nun die Punkte einer Ebene eine zweifach-unendliche Mannigfaltigkeit bilden, so bilden die sämtlichen, von einem Punkt einer Ebene ausgehenden Geraden eine ebensolche Mannigfaltigkeit, und die sämtlichen Geraden im Raum bilden eine $(2 + 2) =$ vierfach-unendliche Mannigfaltigkeit. Der Raum, als von geraden Linien erfüllt gedacht, hat demnach vier Dimensionen. Ebenso erscheint der Raum als sechsfach-unendliche Mannigfaltigkeit, wenn man die Kreislinie als räumliches Elementargebilde betrachtet. Da man nämlich in einer Ebene um jeden Punkt unendlich viele Kreise schlagen kann, und da die Punkte der Ebene eine zweifache Mannigfaltigkeit bilden, so erscheint die Ebene als dreifach unendliche Mannigfaltigkeit. Denken wir uns nun alle Ebenen im Raum, die wieder eine dreifache Mannigfaltigkeit bilden, und in jeder alle Kreise, so erhält man alle im Raum denkbaren Kreise, die hiernach eine $(3 + 3 =)$ sechsfach-unendliche Mannigfaltigkeit bilden. Aus diesen Beispielen, die man noch vermehren könnte, ersieht man, dass es nur von der Wahl des Elementargebildes abhängt, ob man die Ebene als eine Mannigfaltigkeit von zwei oder mehr Dimensionen, den Raum als eine solche von drei oder mehr Dimensionen auffassen will. Jede solche Auffassung ist eine zufällige Ansicht, die unsere Vorstellung über das Wesen des Raums nicht ändert. Nun haben aber einzelne die Ansicht geäussert, dass der Raum, im ersten Sinn aufgefasst, mehr als drei Dimensionen besitze, dass also zur Länge, Breite und Höhe in dem uns allen geläufigen Sinn vielleicht noch eine vierte Dimension hinzukomme, die wir allerdings wegen der Beschränktheit unseres menschlichen Geistes nicht zu erkennen oder uns vorzustellen vermögen. Diese Vorstellung findet sich schon in dem „Enchiridium metaphysicum“ von Henry More (1671), der den Geistern vier Dimensionen zuschreibt; sodann bei dem protestantischen Pfarrer Fricker (1729—61), bei Kant, Gauss und neuerdings bei den Physikern Mach und Zöllner.

Sie hat einen doppelten Zweck: 1) in einer ebenen Fläche alle Körper von bestimmter Form darzustellen und die graphischen Operationen so in ebene Konstruktionen umzuformen, wie es im Raum auszuführen unmöglich wäre; 2) aus dieser Darstellung der Körper ihre mathematischen Beziehungen abzuleiten, welche aus ihrer Gestalt und gegenseitigen Lage entspringen.

„Die Geometrie der Griechen war ganz auf die Betrachtung der Figur, auf die sinnliche Anschauung gegründet. Diese dem Wesen der Methode entsprechende Eigentümlichkeit war bei der Anwendung der Algebra verloren gegangen; aus den Verhältnissen der durch die Rechnung entwickelten Grössen erkannte man die Eigenschaften der Figur, ohne sie bildlich wiederzugeben oder sie in ihrer Räumlichkeit aufzufassen. Dadurch gingen aber manche Betrachtungen, welche die Verhältnisse einer Figur ausserdem noch darbieten konnten, verloren, es fehlte an der Anregung zur Erweckung neuer Ideen. Nach der Anschauung von Descartes ist eine krumme Linie die Aufeinanderfolge von Punkten, welche durch zwei Gerade nach einem gewissen Gesetz bestimmt werden, und aus der Gleichung, welche dieses Gesetz enthält, kann man durch Rechnung alle Eigenschaften einer Kurve und alle metrischen Relationen ableiten; eine Zeichnung ist dabei nicht nötig. Diese Auffassung ist aber keineswegs allgemein, und es ergab sich auch bald eine zweite; eine Kurve kann beschrieben werden, wenn eine veränderliche Gerade um einen festen Punkt sich dreht und ein Gesetz zwischen der Veränderung des Winkels und der des beschreibenden Radius gegeben ist. Sie kann ferner erzeugt werden, wenn eine Gerade nach einem bestimmten Gesetz ihre Lage stetig ändert und dadurch eine Folge von Tangenten gebildet wird, welche neue Kurven einschliessen. Aber auch diese Mittel sind nur besondere Fälle, und es gibt noch eine Menge anderer Wege, auf welchen das gleiche Ziel erreicht werden kann. Man begreift leicht, dass jede dieser Methoden ihre besonderen Vorzüge hat, durch welche sie zur Herleitung gewisser Eigenschaften mehr als eine andere geeignet ist. Die Mathematik ist aber auf dem Punkt angekommen, wo sie streben muss, die Masse der einzelnen Sätze zu gruppieren und jede Gruppe unter ein allgemeines Gesetz zu stellen, welches alle umfasst und wovon sie nur Korollarien sind. Die Ableitung muss aber auf eine einfache Weise geschehen und die einzelnen Sätze müssen aus dem allgemeinen auf eine leichte Art erkannt werden können. Man denke sich nun, dieses allgemeine Gesetz eines Raumgebildes sei in einer ihm entsprechenden Zeichnung niedergelegt und man vermöge nun, durch eine stete Veränderung oder Transformation vom Allgemeinen durch alle Besonderheiten durchzugehen, so werden dem Geist alle die einzelnen Sätze in ihrer natürlichen Folge vorgeführt, und er erkennt ihren notwendigen Zusammenhang mit dem Hauptsatz. Aber auch umgekehrt kann man auf diesem Wege vom Besonderen zum Allgemeinen aufsteigen, wenn die transformierte Figur allgemeiner ist, die bedingenden Verhältnisse aber nicht geändert worden sind. Man denke sich in einer Ebene einen Kreis $C$ und durch einen bestimmten Punkt $O$ eine Sehne $BD$ gezogen, und an $B$ und $D$ die Tangenten $AB$ und $AD$, welche sich in $A$ schneiden, sodann die Gerade $AO$, welche den Kreis in $M$ und $N$ schneidet, so sind die Punkte $A$, $M$, $O$, $N$ vier harmonische Punkte. Man denke sich ferner über dem Kreis einen geraden Cylinder und auf $AD$, $AB$, $BN$, $ND$ senkrechte Ebenen und nun das Ganze durch eine Ebene durchschnitten, welche nicht parallel ist zur Grundebene, so entsteht durch diesen Schnitt eine ähnliche Figur, in welcher der Kreis durch eine Ellipse

Figur 94.



ersetzt wird, und man erkennt leicht, dass der für den Kreis angegebene Satz auch für die Ellipse gilt. Auf diese und ähnliche Weise können eine ganze Menge Sätze verallgemeinert werden, aber alle Methoden setzen eine vollständige Anschauung der vorliegenden Verhältnisse voraus." [1])

Wenn man von allen Punkten der begrenzenden Linien eines Raumgebildes sich senkrechte Linien auf irgend eine Ebene gezogen denkt, so entsteht dadurch eine ebene Figur, welche die Projektion der im Raum enthaltenen ist. Gewöhnlich nimmt man zwei Ebenen, eine horizontale und eine vertikale, und projiziert ein Raumgebilde auf beide; die erste Figur heisst die Horizontalprojektion und die andere die Vertikalprojektion; in der Baukunst sind sie unter dem Namen Grund- und Aufriss bekannt.

„Das Verfahren, wodurch Monge die Figuren im Raum in ebene Figuren umwandelt, vermittelst senkrechter Projektion auf zwei untereinander rechtwinklige Ebenen, bietet ein vorzügliches Mittel dar, um eine Menge von Sätzen aus der ebenen Geometrie an Figuren zu entdecken, welche aus der Vereinigung dieser beiden Projektionen entstehen, so dass es keine Zeichnung in der beschreibenden Geometrie gibt, welche nicht irgend ein Theorem der ebenen Geometrie ausdrückte. Ausserdem führt die beschreibende Geometrie zu unendlich vielen Mitteln, in der Ebene Figuren in andere Figuren derselben Art zu verwandeln, so wie es De la Hire und Newton gethan haben. Besonders bietet sie viele Mittel dar, um den Zweck zu erreichen, welchen sich De la Hire vorgesetzt hatte, in der Ebene vermittelst des Zirkels die verschiedenen Kegelschnitte zu beschreiben und so die Operationen der Perspektive auf die Ebene zu übertragen." — „In Monges Methode findet sich aber auch der Anfang einer neuen Schreib- und Sprechweise für die Geometrie. Die alte Geometrie strotzt von Figuren. Die Gedankenfolge darin ist einfach; jede Aufgabe wird nur in ihrem konkreten Zustand an der Figur selbst betrachtet, deren Anblick nur die zum Beweis oder zur Auflösung nötigen Elemente entdecken lässt. Man hat aber die Unbequemlichkeit dieser Verfahrungsart erfahren durch die Schwierigkeit der Konstruktionen gewisser Figuren und durch die Verwickelung, welche das Verständnis mühsam und beschwerlich macht. Hauptsächlich bei den Untersuchungen in der Geometrie dreier Dimensionen, wo die Figuren vollkommen unmöglich werden können, wird diese Unbequemlichkeit recht fühlbar."

„Dieser Fehler der alten Geometrie war der Grund zu einem der Vorzüge der analytischen Geometrie, in der er vermieden war. Monge und sein Schüler Arago haben uns gelehrt, dass man in der reinen und spekulativen Geometrie eine Betrachtungsart gibt, wobei nicht beständig Figuren nötig sind, deren Unbequemlickeit immer darin besteht, den Geist zu ermüden und die Gedanken zu hemmen. Obgleich Monges beschreibende Geometrie ihrer Natur nach wesentlich von Figuren Gebrauch macht, so geschieht dieses doch nur in den wirklichen und mechanischen Anwendungen, worin sie die Stelle eines Instruments vertreten; aber niemand hat mehr als Monge die Geometrie ohne Figuren aufgefasst und ausgebildet. In unerhörtem Grad hat er es verstanden, die zusammengesetztesten Formen der Ausdehnung im Raum deutlich zu machen und ihre allgemeinen Beziehungen und ihre verstecktesten Eigenschaften zu versinnlichen, ohne eine andere Hilfe als die seiner Hände, deren Bewegungen wunderbar seinem Willen folgten und immer begleitet waren von einer wahrhaften Beredsamkeit des Sprechers, von Präzision, von Reichtum und Tiefe der Ideen." [2])

„Monge, der Erfinder des wissenschaftlich begründeten Zeichnens, fegte den herkömmlichen Wust von Figuren aus der Geometrie hinaus, nicht weil er

[1]) Arneth. — [2]) Chasles.

die geometrische Anschauung zurückdrängen, sondern vielmehr gerade dadurch fördern wollte, dass er durch seine Beschreibung ein geistiges Bild entstehen liess. Ferner folgte in der alten Geometrie Satz auf Satz ohne Vermittlung und zusammenhängende Entwickelung. Auch hierin verdankt man Monge einen Fortschritt; seine Werke sind wahre Muster eleganter, fliessender Darstellung, frei von all jenem veralteten Rüstzeug." [1])

Die Schüler Monges haben diese seine Geometrie mit Erfolg kultiviert. Die auf diese Weise gemachten zahlreichen Entdeckungen können hier nicht behandelt werden; wohl aber soll noch eines Satzes Erwähnung geschehen, der unter dem Namen des **Lehrsatzes von Monge** sich in den planimetrischen Lehrbüchern findet. Derselbe lautet:

Figur 95.

Von den sechs Aehnlichkeitspunkten,[2]) welche zu drei Kreisen gehören, liegen sowohl die drei äusseren als auch je zwei innere mit einem äusseren in gerader Linie.

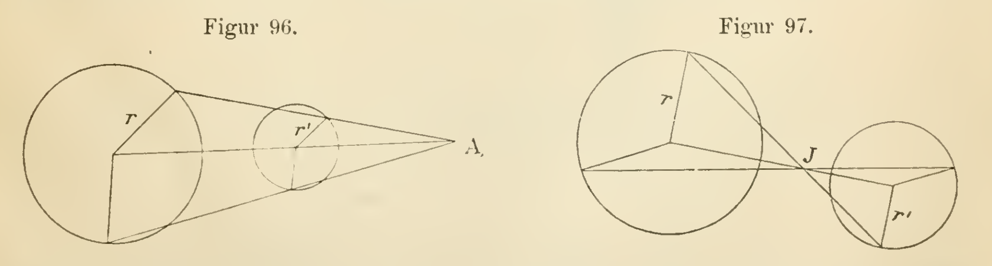
Beweis: Betrachtet man zunächst die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte $A_1$, $A_2$, $A_3$, welche auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ liegen, so ist

$$O_1 A_3 : O_2 A_3 = r_1 : r_2$$
$$O_2 A_1 : O_3 A_1 = r_2 : r_3$$
$$O_3 A_2 : O_1 A_2 = r_3 : r_1.$$

[1]) Gerhardt.

[2]) Zieht man in zwei Kreisen mehrere Paare von parallelen Radien so, dass jedes Paar auf derselben Seite der Zentralen liegt, so gehen die Verbindungslinien der Endpunkte aller Paare durch denselben Punkt der verlängerten Zentrale. Dieser Punkt $A$ heisst äusserer Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise. — Zieht man in zwei Kreisen mehrere Paare von parallelen

Figur 96. Figur 97.




Radien so, dass die Radien jedes Paares auf verschiedenen Seiten der Zentrale liegen, so gehen die Verbindungslinien der Endpunkte aller Paare durch denselben Punkt der Zentrale. Dieser Punkt heisst innerer Aehnlichkeitspunkt ($J$) der beiden Kreise.

Hieraus folgt

$$O_1A_3\cdot O_2A_1\cdot O_3A_2 = O_1A_2\cdot O_2A_3\cdot O_3A_1;$$

daher ist $A_1A_2A_3$ eine Gerade. Von den drei Aehnlichkeitspunkten $A_1$, $J_2$, $J_3$ liegen $J_2$ und $J_3$ auf zwei Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$ selbst, $A_1$ auf der Verlängerung der dritten Seite und es ist:

$$O_1J_3 : O_2J_3 = r_1 : r_2$$
$$O_2A_1 : O_3A_1 = r_2 : r_3$$
$$O_3J_2 : O_1J_2 = r_3 : r_1.$$

Hieraus folgt

$$O_1J_3\cdot O_2A_1\cdot O_3J_2 = O_1J_2\cdot O_2J_3\cdot O_3A_1;$$

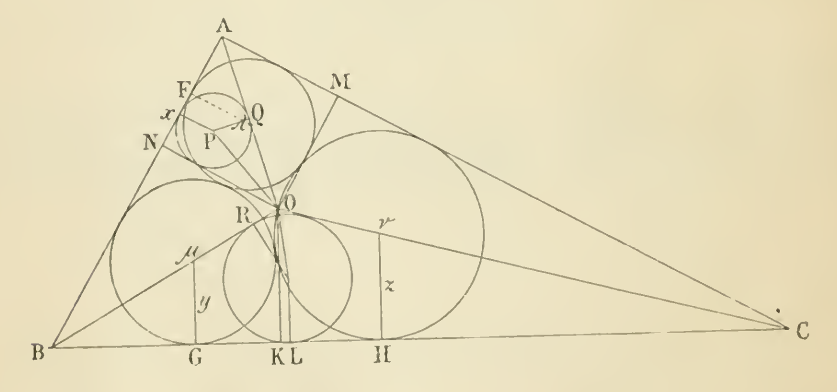
daher ist $A_1J_2J_3$ eine Gerade. Ebenso liegen $A_2J_3J_1$ und $A_3J_1J_2$ in geraden Linien.

Zwei Sätze sind es noch, welche auf dem Gebiet der Geschichte der Elementargeometrie des 19. Jahrhunderts zu bemerken sind. Der erste dieser Sätze, zuerst von Malfatti, Professor zu Ferrara, im Jahr 1803 behandelt, heisst das Malfattische Problem und fordert in ein gegebenes Dreieck drei Kreise so zu konstruieren, dass jeder die beiden andern und zwei Seiten des Dreiecks berührt; der zweite Satz enthält die Eigenschaften des Feuerbachschen Kreises und stammt von Karl Wilh. Feuerbach, Lehrer der Mathematik am Erlanger Gymnasium (geb. 30. Mai 1800, gest. 12. März 1834).

Eine einfache Lösung des Malfattischen Problems, die von Adams herrührt, ist folgende:

Man halbiere die Winkel des gegebenen Dreiecks durch die Geraden $AO$, $BO$, $CO$, fälle die Senkrechten $OK$, $OM$, $ON$ auf die drei Seiten, beschreibe in das Dreieck $BOC$ einen Kreis, welcher $BC$ in $L$ berührt, und in das Dreieck $ANO$ den Kreis $P$, welcher $OA$ in $Q$ berührt. Hierauf trage man $OQ$ von $L$ aus auf $BC = LG$ und $LH$ ab und errichte auf $BC$ die Senkrechten $y$ und $z$.

Figur 98.

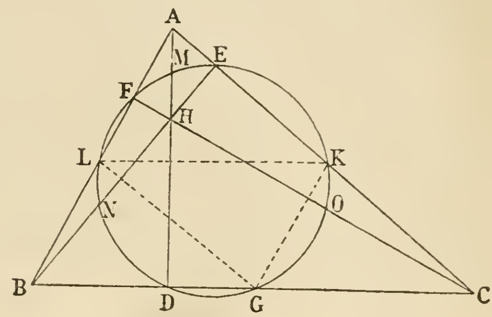



so sind $\mu$ und $\nu$ die Mittelpunkte, $y$ und $z$ die Radien zweier der gesuchten Kreise. Auf ähnliche Weise wird der dritte Kreis konstruiert, indem man vom Berührungspunkt $x$ aus die Entfernung $RO = xF$ abträgt. Eine Senkrechte $F\lambda$ auf $AN$ errichtet, gibt den Radius des dritten Kreises. (Ausführlicheres hierüber findet sich in Dr. K. F. Junghans Lehrbuch der Geometrie II, S. 283.)

Der Lehrsatz über den Feuerbachschen Kreis lautet: Der Kreis, welcher durch die Fusspunkte der drei Höhen eines Dreiecks geht, halbiert die Seiten des Dreiecks und die oberen Abschnitte der Höhen.

Beweis: Der durch die Fusspunkte $D$, $E$, $F$ der Höhen gelegte Kreis schneidet die Seiten des Dreiecks in den Punkten $LGK$. Dann ist nach dem Sekantensatz: „Wenn sich zwei Sekanten ausserhalb eines Kreises schneiden, so bilden die Abschnitte der einen die inneren, die Abschnitte der andern die äusseren Glieder einer Proportion.“

Figur 99.




$$AF : AE = AK : AL$$

oder

$$AF \cdot AL = AE \cdot AK$$
$$AF \cdot AB = AE \cdot AC.$$

Denn $FBCE$ ist ein Sehnenviereck, folglich

$$\frac{AL}{AB} = \frac{AK}{AC} \text{ und } LK \parallel BC;$$

analog

$$LG \parallel AC, \; KG \parallel AB.$$

Daraus folgt:

$$LK = GB, \; LK = GC,$$

mithin auch

$$BG = GC,$$

und ebenso

$$AK = KC, \; AL = LB.$$

Ferner ist

$$AF \cdot AL = AM \cdot AD$$
$$AF \cdot AB = AH \cdot AD, \text{ denn } FBDH \text{ ist ein Sehnenviereck;}$$

folglich:

$$\frac{AL}{AB} = \frac{AM}{AH}.$$

Da nun

$$AB = 2AL,$$

so ist auch

$$AH = 2AM,$$

also $AH$ in $M$ halbiert. Ebenso werden $BH$ und $CH$ durch den Kreis in $N$ resp. $O$ halbiert.

---

„Die Geometrie bietet uns unter allen Zweigen der Mathematik das lehrreichste Bild. Wir sehen, wie die Menschen vom Anfang des reinen Denkens an das Einzelne zu fassen suchten und nur dieses mit Sicherheit erkennen wollten und konnten. Auf dieser Stufe war eine Beziehung des Erkannten zur Aussenwelt noch nicht möglich, aber sie erhob sich allmählich, in gleichem Mass nahm aber auch die Strenge der Darstellung, des Denkens ab. Nun folgte die Ablösung beider Richtungen von ihren Erzeugern, weil sie ihnen keine weitere Entwickelung mehr zu geben vermochten, und die Uebertragung auf ein neues Element, welches sie in eigentümlicher Weise verarbeitete und dann wieder auf einen ganz neuen Boden verpflanzte. Hier ging nun aus dem Umsturz aller

Verhältnisse eine ganz neue Entwickelung hervor mit vorherrschend praktischer Richtung, und allmählich nur trat die alte Wissenschaft hinzu. So blieben alle Erfolge der früheren geistigen Thätigkeit gesichert, sie dienten aber jetzt als aufgesparte Kräfte, als Anregungsmittel zu neuen Erzeugnissen; die Auffassung war eine andere, höhere und allgemeinere geworden. Die Erfindung einzelner geometrischer Sätze wurde jetzt Nebensache, man suchte umfassende Methoden, um die Hilfsmittel zur Forschung zu vereinfachen; man suchte die getrennten Sätze zu vereinigen und sie als Ausflüsse allgemeiner Sätze darzustellen. Zuletzt trat das Streben hervor, von einem einfachen Grundsatz aus alle Verhältnisse und Eigenschaften der Raumgebilde zu entwickeln und somit alle einzelne als die notwendige Folge eines ersten und höchsten Gesetzes zu erkennen."

„In dem Streben nach dem Aufsteigen zur Einheit liegt der Charakter unserer Zeit: es spricht sich jetzt erst vereinzelt aus, wird aber immer mehr hervortreten und zuletzt alle Hindernisse bewältigen, welche ihm entgegengestellt werden. Dieses Ziel müssen die Menschen erreichen, wenn sie ihre Bestimmung erfüllen sollen; ihr Streben geht darnach seit mehr als 2000 Jahren, und es gibt sich jetzt in allen unseren Verhältnissen und Zuständen kund: jeder einzelne arbeitet instinktartig daran, nur wenige, verhältnismässig, sind sich ihrer Bestrebungen bewusst." [1])

[1]) Arneth.

